MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion ACHIRI
Vasile CIOBANU
Petru EFROS
Valentin GARIT
Vasile NEAGU
Nicolae PRODAN
Dumitru TARAGAN
Anatol TOPALĂ

MATEMATICĂ

Ediția a II-a, revizuită şi completată

MANUAL PENTRU CLASA XI

EDITURA PRUT

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova
nr. 267 din 11 aprilie 2014.
Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi finanțată din Fondul Special pentru Manuale.

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației al Republicii Moldova.

Şcoala/Liceul .... Manualul nr.				
Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului	Anul şcolar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele clasei va controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu vor face nici un fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IŞE (Capitolul 4)
Vasile Ciobanu, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolul 1)
Petru Efros, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolele 8–10)
Valentin Garit, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolele 8–10)
Vasile Neagu, doctor habilitat, profesor universitar, USM (Capitolele 3, 5)
Nicolae Prodan, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolele 6, 7)
Dumitru Taragan, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolul 2)
Anatol Topală, doctor, conferențiar universitar, USM (Capitolele 6, 7)

Comisia de evaluare: *Dorin Afanas*, doctor, conferențiar universitar, UST
Andrei Corlat, doctor, conferențiar universitar, AŞM
Aliona Pogreban, profesoară, grad didactic superior,
Liceul Teoretic „Gaudeamus", Chişinău

Redactor: *Tatiana Rusu*
Corector: *Nina Artin*
Copertă: *Sergiu Stanciu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD 2051
Tel.: 75 18 74; tel./fax: 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro; www.edituraprut.md

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 3260

CZU 51(075.3)
M 47

ISBN 978-9975-54-145-9

Cuvînt-înainte

Prezentul manual este elaborat conform curriculumului liceal modernizat la matematică axat pe formarea de competenţe.

Manualul este structurat pe module. Pentru orientare, la începutul fiecărui modul sînt formulate obiectivele educaţionale care pot fi atinse studiind modulul respectiv. Obiectivele marcate cu * vizează numai elevii de la profilul real. Menţionăm că manualul conţine compartimente ce ţin de elemente de analiză matematică, numere complexe, elemente de algebră superioară şi geometrie.

La această treaptă a şcolarizării, elevii se familiarizează cu o serie de concepte noi. Acest fapt este un motiv în plus să chemăm cititorii să parcurgă atent atît materialul teoretic (definiţii, teoreme, proprietăţi etc.), cît şi exemplele ilustrative, exerciţiile motivaţionale şi cele rezolvate. Numai în acest mod pot fi realizate prevederile principiilor constructiv şi formativ puse la baza studierii matematicii în învăţămîntul preuniversitar.

Menţionăm că în manual sînt folosite şi unele noţiuni, metode şi procedee care nu sînt specificate de curriculum, însă reprezintă instrumente educaţionale eficiente pentru atingerea obiectivelor. Printre ele menţionăm: matricea eşalon, definiţia determinanţilor axată pe dezvoltarea determinanţilor după o linie sau după o coloană. Astfel, prin intermediul manualului, autorii concretizează întru cîtva curriculumul proiectat, pornind de la necesităţile actuale şi de perspectivă privind predarea–învăţarea–evaluarea matematicii în liceu.

Manualul este structurat astfel încît să poată fi utilizat la predarea matematicii atît elevilor de la profilul real, cît şi celor de la profilul umanistic, arte şi sport. De reţinut că **materialul (textul) marcat în partea stîngă cu o bară verticală este prevăzut numai pentru profilul real. Pentru profilul umanistic aceste texte pot fi propuse ca extinderi.** În plus, în conformitate cu obiectivele preconizate, exerciţiile şi problemele propuse la sfîrşitul fiecărui paragraf, precum şi la sfîrşitul fiecărui modul sînt clasificate după profil. Cele notate cu litera **A** sînt destinate ambelor profiluri, iar cele notate cu litera **B** – numai elevilor de la profilul real, fiind extinderi pentru cei de la profilul umanistic. Exerciţiile marcate cu * au un grad sporit de complexitate şi nu sînt obligatorii pentru rezolvare la profilul respectiv.

Probele de evaluare servesc la verificarea nivelului performanţelor atinse şi sînt elaborate pe profiluri: **A** – profilul umanistic, arte şi sport; **B** – profilul real.

Unele prevederi ţin să faciliteze organizarea lucrului individual al elevilor. În afară de exemplele motivaţionale, de consolidare şi de utilizare a conceptelor, în manual sînt prezentate modele de rezolvare a principalelor tipuri de exerciţii şi probleme.

Simbolurile şi notaţiile folosite sînt cele întîlnite frecvent în literatura de specialitate şi recomandate de curriculumul gimnazial la matematică. Sînt folosite literele alfabetului grec, pe care-l reproducem mai jos.

Manualul oferă elevilor pasionaţi de matematică posibilităţi pentru a-şi extinde cunoştinţele, atît prin însuşirea unor noţiuni teoretice suplimentare (opţionale), cît şi prin rezolvarea unor probleme mai complicate.

Stimaţi profesori şi dragi elevi, sperăm ca acest manual să devină un instrument didactic util în studierea matematicii. Totodată vom fi recunoscători pentru obiecţiile şi sugestiile dumneavoastră ce vor contribui la îmbunătăţirea conţinutului manualului.

Autorii

Alfabetul grec

Litere	Citirea literelor	Litere	Citirea literelor
Α α	alfa	Ν ν	niu
Β β	beta	Ξ ξ	csi
Γ γ	gama	Ο o	omicron
Δ δ	delta	Π π	pi
Ε ε	epsilon	Ρ ρ	ro
Ζ ζ	zeta	Σ σ	sigma
Η η	eta	Τ τ	tau
Θ θ	teta	Υ υ	ipsilon
Ι ι	iota	Φ φ	fi
Κ κ	kapa	Χ χ	hi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
Μ μ	miu	Ω ω	omega

Modulul

1 Şiruri de numere reale

Obiective

- reprezentarea prin simboluri a şirurilor, *subşirurilor de numere reale;
- clasificarea după diverse criterii a şirurilor numerice;
- aplicarea progresiilor aritmetice şi geometrice în diverse contexte;
- *utilizarea în diverse contexte a noţiunii de vecinătate a unui punct în $\mathbb{R}$;
- *utilizarea în diverse contexte a noţiunii de limită a şirului, a simbolurilor şi terminologiei respective;
- *aplicarea proprietăţilor şirurilor convergente în contexte variate.

În modulele 1–5 vom studia elemente de analiză matematică – unul dintre compartimentele fundamentale ale matematicii. Aplicaţii ale analizei matematice întîlnim în fizică, tehnică, geometrie, economie şi în multe alte domenii. Cadrul numeric al analizei matematice îl constituie mulţimea numerelor reale. Obiectele ei de studiu – dependenţele funcţionale, derivatele, integralele – sînt, în fond, limite definite în mod corespunzător. Pentru a studia limitele de funcţii, este necesar să examinăm limitele de şiruri numerice.

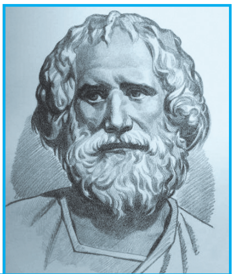
§1 Şiruri numerice. Recapitulare şi completări

1.1. Marginile inferioare şi superioare ale mulţimilor de numere reale

Vom studia unele proprietăţi ale mulţimilor de numere reale necesare pentru fundamentarea studiului analizei matematice.

Axioma continuităţii mulţimii numerelor reale

Fie A şi B două submulţimi nevide ale mulţimii $\mathbb{R}$, astfel încît pentru orice $a \in A$ şi orice $b \in B$ are loc relaţia $a \le b$. Atunci există cel puţin un $c \in \mathbb{R}$, astfel încît $a \le c \le b$.


Arhimede din Siracuza

Principiul lui Arhimede[1]

Pentru orice număr real x există un unic număr întreg m, astfel încît $m \le x < m+1$.

Numărul m se numeşte ***partea întreagă*** a numărului x şi se notează $[x]$.

[1] Arhimede din Siracuza (cca 287–212 î.H.) – învăţat grec.

Definiţii. • Mulţimea $X \subset \mathbb{R}$ se numeşte **mărginită superior** (**mărginită inferior**) dacă există un număr $c \in \mathbb{R}$, astfel încît $x \le c$ $(x \ge c)$, pentru orice $x \in X$. Numărul c se numeşte **majorant** (**minorant**) pentru mulţimea X.

• Mulţimea $X \subset \mathbb{R}$ se numeşte **mărginită** dacă ea este mărginită superior şi inferior, adică există numerele reale m, M, astfel încît $m \le x \le M$, pentru orice $x \in X$.

Pentru fiecare dintre aceste propoziţii poate fi formulată negaţia ei logică. De exemplu, negaţia primei propoziţii este: mulţimea $X \subset \mathbb{R}$ nu este mărginită superior (mărginită inferior) dacă pentru orice $m \in \mathbb{R}$ există $x' \in X$, astfel încît $x' > m$ $(x' < m)$. (Cu ajutorul cuantificatorilor universali $\forall, \exists$ condiţia „pentru orice [oricare ar fi] $m \in \mathbb{R}$ există $x' \in X$” se scrie concis astfel: $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x' \in X$.)

Observaţie. Orice mulţime $X \subset \mathbb{R}$, mărginită superior (mărginită inferior), are o infinitate de majoranţi (minoranţi). Dacă numărul c este un majorant (minorant) pentru mulţimea X, atunci oricare alt număr c_1 mai mare (mai mic) decît c de asemenea este un majorant (minorant) pentru mulţimea X. Într-adevăr, pentru orice $x \in X$, astfel încît $x \le c$ şi $c < c_1$, rezultă că $x \le c_1$, deci c_1 este de asemenea un majorant.

Definiţie. Elementul $a \in X$ (dacă există), $X \subset \mathbb{R}$, se numeşte **cel mai mare** (respectiv **cel mai mic**) element al mulţimii X dacă pentru orice $x \in X$ avem $x \le a$ (respectiv $x \ge a$). În acest caz, se notează: $a = \max X$ $(a = \min X)$.

Exemplu

Pentru mulţimea $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$, $\max A = 1$, iar $\min A$ nu există.

Definiţii. • Cel mai mic majorant (dacă există) al mulţimii mărginite superior $X \subset \mathbb{R}$ se numeşte **margine superioară** (**supremum**) pentru X şi se notează $\sup X$.

• Cel mai mare minorant (dacă există) al mulţimii mărginite inferior $X \subset \mathbb{R}$ se numeşte **margine inferioară** (**infimum**) pentru X şi se notează $\inf X$.

Observaţie. Fie $\alpha = \inf X$ şi $\beta = \sup X$, iar $Y = \{-x \mid x \in X\}$, atunci $\inf Y = -\beta$ şi $\sup Y = -\alpha$.

Exemple

1. Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ nu este mărginită superior, dar este mărginită inferior. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ nu este mărginită. Mulţimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nu sînt mărginite nici inferior, nici superior.

2. Mulţimea $X = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ este mărginită, deoarece $\forall n \ge 1$ avem $0 < \frac{1}{n} \le 1$.

3. Mulţimea $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este mărginită, deoarece $-1 \le \sin x \le 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Observaţie. În exemplul **2**, $\inf X = 0 \notin X$, $\sup X = 1 \in X$, iar în exemplul **3**, $\inf A = -1 \in A$, $\sup A = 1 \in A$. Aşadar, supremumul (infimumul) unei mulţimi $X \subset \mathbb{R}$ poate să aparţină sau poate să nu aparţină acestei mulţimi.

O mulțime nevidă mărginită superior are o infinitate de majoranți, iar supremumul ei este cel mai mic majorant. Cum o mulțime infinită de numere poate să nu aibă cel mai mic element (a se vedea exemplul 2), apare următoarea întrebare: o mulțime numerică nevidă mărginită superior (inferior) posedă oare supremum (infimum)?

Teorema 1. Orice mulțime numerică nevidă mărginită superior (inferior) posedă margine superioară (inferioară) şi această margine este unică.

Demonstrație

Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă mărginită superior, iar Y mulțimea tuturor majoranților mulțimii X, adică $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X,\ x \le y\}$.

Conform ipotezei, $X \ne \varnothing$, $Y \ne \varnothing$ şi $x \le y$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$. În virtutea axiomei continuității mulțimii numerelor reale, există un număr c, astfel încît $\forall x \in X$ şi $\forall y \in Y$

$$x \le c \le y \Leftrightarrow \begin{cases} x \le c, \\ c \le y. \end{cases} \tag{1}$$

Din prima inegalitate a sistemului (1) rezultă că numărul c este un majorant pentru X, iar din a doua inegalitate – că numărul c este cel mai mic majorant pentru X, deci c este marginea superioară a mulțimii X. Astfel, $c = \sup X$.

Să demonstrăm că această margine este unică. Presupunem contrariul: că mulțimea X are două margini superioare diferite, c şi c'. Fie, de exemplu, $c' < c$. Deoarece $c = \sup X$ şi $c' < c$, conform definiției, rezultă că există un element $x_{c'} \in X$, astfel încît $x_{c'} > c'$. Aceasta contrazice presupunerea că $c' = \sup X$. Prin urmare, $c = c'$.

Existența marginii inferioare a unei mulțimi nevide mărginite inferior şi unicitatea ei se demonstrează în mod analog. ►

Teorema 2 (de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi)
Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă mărginită superior. Numărul M^* este marginea superioară a mulțimii X dacă şi numai dacă:
1) $x \le M^*$, pentru orice $x \in X$;
2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încît $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$.

Teorema 3 (de caracterizare a marginii inferioare a unei mulțimi)
Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă mărginită inferior. Numărul m^* este marginea inferioară a mulțimii X dacă şi numai dacă:
1) $x \ge m^*$, pentru orice $x \in X$;
2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încît $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$.

Demonstrația acestor teoreme rezultă imediat din definiția marginii superioare şi respectiv a celei inferioare pentru o mulțime.

Dacă mulțimea X nu este mărginită superior (inferior), atunci vom conveni să scriem $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$. Pentru $X = \mathbb{R}$, convenim că $\inf \mathbb{R} = -\infty$ şi $\sup \mathbb{R} = +\infty$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, considerăm că $-\infty < x < +\infty$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se determine supremumul şi infimumul mulţimii $A=\left\{1-\frac{1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Rezolvare:

Evident că $0\le 1-\frac{1}{n}<1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Deci, mulţimea A este mărginită.

Să demonstrăm că $\sup A=1$. Vom aplica teorema de caracterizare a marginii superioare a unei mulţimi. Deoarece $1-\frac{1}{n}<1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că prima condiţie a teoremei 2 este verificată.

Observăm că pentru orice $\varepsilon>0$ inecuaţia $1-\frac{1}{n}>1-\varepsilon$ are soluţii în $\mathbb{N}^*$. Fie n_ε una dintre aceste soluţii. Obţinem că pentru orice $\varepsilon>0$ există numărul $1-\frac{1}{n_\varepsilon}\in A$, astfel încît $1-\frac{1}{n_\varepsilon}>1-\varepsilon$. Aşadar, condiţia a doua a teoremei 2 este verificată. Prin urmare, $\sup A=1$.

Să demonstrăm că $\inf A=0$. Avem $1-\frac{1}{n}\ge 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Cum 0 aparţine acestei mulţimi (pentru $n=1$), rezultă că $\inf A=0$. Constatăm că $\inf A=\min A\in A$, iar $\sup A\notin A$.

2. Fie mulţimea $A=\left\{\frac{n^2}{n^2+4}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Să se demonstreze că mulţimea A este mărginită.

b) Să se determine supremumul şi infimumul mulţimii A.

Rezolvare:

a) Observăm că $0\le\frac{n^2}{n^2+4}<1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Deci, mulţimea A este mărginită.

b) Să demonstrăm că $\sup A=1$. Vom aplica teorema 2. Prima condiţie a teoremei este verificată. Vom arăta că pentru orice $0<\varepsilon<1$ inecuaţia $\frac{n^2}{n^2+4}>1-\varepsilon$ are soluţii în $\mathbb{N}$. Rezolvînd această inecuaţie, obţinem $n>2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$ şi, conform principiului lui Arhimede, $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, astfel încît $n_\varepsilon>2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$, anume $n_\varepsilon=\left[2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\right]+1$. Prin urmare, $\sup A=1$.

Deoarece $\frac{n^2}{n^2+4}\ge 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, şi $0\in A$, rezultă că $\inf A=0$.

Observaţie. Mulţimea tuturor fracţiilor subunitare pozitive nu posedă nici cel mai mic element, nici cel mai mare element, infimumul şi supremumul acestei mulţimi fiind respectiv numerele 0 şi 1.

1.2. Noţiunea de şir numeric. Şiruri finite, infinite. Subşiruri

Definiţie. Fie $E\subset\mathbb{R}$ o submulţime. Se numeşte **şir de numere reale** (**şir numeric**, **şir real**) orice funcţie $f:\mathbb{N}^*\to E$.

O astfel de funcţie asociază fiecărui număr natural $n\in\mathbb{N}^*$ un unic număr real $f(n)\in E$.

Dacă funcţia f este definită pe o submulţime finită a elementelor consecutive ale mulţimii $\mathbb{N}^*$, atunci se obţine un ***şir numeric finit***. În caz contrar, şirul obţinut se numeşte ***şir numeric infinit***.

Numărul $f(n)$ se notează cu x_n şi se numeşte ***termenul de rang*** n al şirului sau ***termenul general*** al şirului, iar însuşi şirul se notează cu $(x_n)_{n\geq 1}$.

***Observaţii.* 1.** Uneori, funcţia f este definită pe $\mathbb{N}$ şi atunci şirul începe cu termenul de rang zero, adică scriem $(x_n)_{n\geq 0}$, sau funcţia este definită pe $\mathbb{N}\setminus\{0, 1, ..., k-1\}$, atunci scriem $(x_n)_{n\geq k}$.

2. În mod frecvent, pentru şiruri utilizăm şi notaţii ca $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$, $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, $(\beta_n)_{n\geq 1}$ etc.

Exemple

1. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, reprezintă şirul inverselor numerelor naturale nenule.

2. Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = n$, este şirul numerelor naturale.

3. Şirul $(b_n)_{n\geq 2}$, $b_n = \sqrt{n-2}$, este şirul $0,\ 1,\ \sqrt{2},\ ...,\ \sqrt{n-2},\ ...$

Şirul se consideră definit dacă este indicat modul de obţinere a termenilor săi.

***Un şir poate fi definit*:**

1) *analitic*, adică prin ***formula termenului general***

Această formulă permite calculul oricărui termen al şirului.

De exemplu, pentru şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin termenul general $x_n = 1+(-1)^n$, avem $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2,\ ...$

2) *prin descrierea termenilor şirului*

De exemplu, şirul numerelor prime este 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

3) *printr-o relaţie de recurenţă*. În acest caz se precizează unul sau cîţiva termeni şi o relaţie de recurenţă din care se deduc ceilalţi termeni ai şirului.

Exemple

1. Fie $x_1 = \sqrt{2}$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, pentru orice $n\geq 1$.

Atunci obţinem şirul $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ ...$

2. Fie $x_0 = 1,\ x_1 = 1$ şi $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ pentru orice $n\geq 2$. Aflăm termenii şirului:
$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = x_1 + x_0 = 2,\ x_3 = x_2 + x_1 = 3,\ x_4 = x_3 + x_2 = 5,\ x_5 = x_4 + x_3 = 8,\ ...$

Aşadar, obţinem şirul 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., care se numeşte ***şirul lui Fibonacci***[1].


Leonardo da Pisa (Fibonacci)

Se poate determina formula termenului general al şirului lui Fibonacci:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\ \text{pentru orice } n\in\mathbb{N}.$$

[1] Leonardo da Pisa (Fibonacci) (1175–1250) – matematician italian.

Şirul lui Fibonacci are aplicaţii în diverse domenii ale matematicii: combinatorică, teoria numerelor, analiză matematică ş.a. El posedă proprietăţi interesante (de exemplu, toţi termenii şirului de rang divizibil cu 3 sînt numere pare, termenii de rang divizibil cu 4 sînt divizibili cu 3, iar termenii de rang divizibil cu 15 sînt divizibili cu 10).

Definiţie. Două şiruri, $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$, se numesc **egale** dacă $x_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, şirurile $\left(\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}\right)_{n\geq 1}$ şi 1, 0, 1, 0, ... sînt egale, iar şirurile 1, 0, 1, 0, ... şi 0, 1, 0, 1, ... nu sînt egale, cu toate că au aceeaşi mulţime de valori ale termenilor: $\{0, 1\}$.

Definiţie. Un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **constant** dacă $x_{n+1} = x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit de $x_1 = 3$ şi $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$, $\forall n \geq 1$, este constant: $x_1 = 3,\ x_2 = 3,\ x_3 = 3,\ \ldots$

1.3. Şiruri monotone. *Şiruri mărginite

Definiţii. • Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **crescător** (respectiv **descrescător**) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **strict crescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Şirurile crescătoare sau descrescătoare se numesc **şiruri monotone**.

• Şirurile strict crescătoare sau strict descrescătoare se numesc **şiruri strict monotone**.

Observaţie. Există şiruri care nu sînt monotone.
De exemplu, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = (-1)^n$: $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ \ldots$

Pentru a determina dacă un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător sau descrescător, se poate proceda astfel:

1. Studiem semnul *diferenţei* a doi termeni consecutivi:

• dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător;

• dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

2. Dacă termenii şirului sînt pozitivi, atunci comparăm cu unitatea *raportul* a doi termeni consecutivi:

• dacă $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, şi $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător;

• dacă $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, şi $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

Înlocuind semnul „$\geq$” („$\leq$”) cu „$>$” („$<$”), se obţin criterii analoage pentru monotonia strictă.

Exerciţiu rezolvat

Să se studieze monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, dacă:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{n+2}$; b) $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Rezolvare:

a) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{(n+1)+1}{(n+1)+2} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)(n+2)-(n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} =$

$= \dfrac{n^2+4n+4-n^2-4n-3}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ceea ce înseamnă că $x_{n+1} > x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică şirul este strict crescător.

b) Observăm că $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} : \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot n(n+1) = \dfrac{n}{n+2} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare, şirul este strict descrescător.

Definiţii. • Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **mărginit superior** (**mărginit inferior**) dacă există un număr real a (respectiv b), astfel încît $x_n \leq a$ (respectiv $x_n \geq b$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
• Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **mărginit** dacă el este mărginit superior şi inferior, adică există două numere $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încît $a \leq x_n \leq b$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este ***nemărginit*** dacă $\forall M > 0,\ \exists n_M \in \mathbb{N}^*$, astfel încît $|x_{n_M}| > M$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se stabilească dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{2n+1}{2n+3}$, este mărginit.

Rezolvare:

$x_n = \dfrac{2n+1}{2n+3} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit inferior.

Să demonstrăm că şirul este mărginit şi superior.

Într-adevăr, $x_n = \dfrac{2n+1}{2n+3} = \dfrac{2n+1+2-2}{2n+3} = \dfrac{(2n+3)-2}{2n+3} = 1 - \dfrac{2}{2n+3} < 1,\ \forall n \geq 1$.

Aşadar, şirul, fiind mărginit inferior şi superior, este mărginit:

$$0 < \frac{2n+1}{2n+3} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, dacă $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Rezolvare:

Să cercetăm monotonia şirului.

Avem $x_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2^n}{n!} \cdot \dfrac{2}{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{2}{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Cum $\dfrac{2}{n+1} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deci, şirul este descrescător.

Evident că şirul este mărginit, deoarece $0<\frac{2^n}{n!}\le 2,\ \forall n\in \mathbb{N}^*$.

Definiţie. Fie $(x_n)_{n\ge1}$ un şir de numere reale şi $(n_k)_{k\ge1}$ un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $(x_{n_k})_{k\ge1}$ se numeşte **subşir al şirului** $(x_n)_{n\ge1}$.

Observaţie. Un şir $(a_n)_{n\ge1}$ are o infinitate de subşiruri. Şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este un subşir al său. În acest caz, $n_k=k,\ \forall k\in \mathbb{N}^*$.

De exemplu, din şirul $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=n$, putem extrage subşirurile $(x_{n_k})_{k\ge1}$, $x_{n_k}=2k+1$ sau $x_{n_k}=2k,\ k\in\mathbb{N}^*$.

Exerciţii propuse

A

1. Să se dea exemple de şiruri finite, infinite.

2. Să se dea un exemplu de şir numeric cu termeni pozitivi, care strict descrescător „se apropie” de zero.

3. Fie şirul $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=\frac{2n+1}{n+4}$.

a) Să se scrie primii cinci termeni ai şirului.

b) Să se studieze monotonia şirului.

B

4. Să se dea exemple de subşiruri ale unui şir.

5. Folosind cuantificatorii logici, să se scrie negaţia propoziţiei:
„Şirul numeric $(x_n)_{n\ge1}$ este mărginit superior”.

6. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=\frac{2n+(-1)^n}{3n}$.

7. Să se dea un exemplu de şir numeric cu termeni negativi, care strict crescător „se apropie” de zero.

8. Să se dea exemple de şiruri care nu sînt mărginite:

a) inferior; b) superior.

9. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului $(x_n)_{n\ge1}$, dacă:

a) $x_n=\frac{3n+1}{4n+3}$; b) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$; c) $x_n=\frac{3n+1}{5n}$; d) $x_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$; e) $x_n=\frac{2n}{n^2+3}$.

10. Pentru şirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin formula termenului general $x_n=\left(\frac{11}{10}\right)^n$:

a) să se scrie primii cinci termeni; b) să se studieze monotonia şi mărginirea şirului.

11. Să se demonstreze că şirul numeric $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=\frac{3n-1}{3n+1}$, este strict crescător şi mărginit.

12. Fie şirul recurent $(x_n)_{n\ge1}$ definit astfel: $x_1=1$ şi $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{3^n},\ \forall n\ge1$.

a) Să se determine formula termenului general al şirului.

b) Să se studieze monotonia şirului.

c) Să se stabilească dacă şirul este mărginit.

13. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 3$ şi $x_{n+1} = 5x_n$, $\forall n \geq 1$.
a) Să se determine formula termenului general al şirului.
b) Să se studieze monotonia şirului.

14. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit de $x_1 = -1$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n - 2$, $\forall n \geq 1$.
a) Să se determine formula termenului de rang *n* al şirului.
b) Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului.

15. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi să se definească acest şir prin formula termenului de rang *n*, dacă:
a) $x_1 = -10$, $x_{n+1} = x_n + 5$ pentru $n \geq 1$; b) $x_1 = 4$, $x_{n+1} = 2x_n$ pentru $n \geq 1$.
Să se studieze monotonia şi mărginirea acestor şiruri.

16. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, este definit prin relaţia de recurenţă cu coeficienţi constanţi: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$, $\forall n \geq 1$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Să se scrie formula termenului general al şirului, dacă:
a) $\alpha = 1$; $\beta \neq 0$; b) $\alpha \neq 0$; $\beta = 0$; c) $\alpha \neq 0$; $\beta \neq 0$.

17. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit de condiţia iniţială $x_1 = 3$ şi relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n + 5$, $\forall n \geq 1$.
Să se determine formula termenului general al şirului.

§2 Progresii aritmetice. Progresii geometrice

Vom cerceta şiruri numerice speciale care admit aplicaţii importante.

2.1. Progresii aritmetice

2.1.1. Noţiunea de progresie aritmetică

Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, astfel încît $a_1 = 2$ şi $a_{n+1} = a_n + 3$ pentru orice $n \geq 1$. Deci, $a_1 = 2$, $a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$, $a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$, $a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11, \ldots$

Observăm că fiecare termen al acestui şir, începînd cu al doilea, se obţine prin adăugarea la termenul precedent a aceluiaşi număr, şi anume 3.

> **Definiţie.** Se numeşte **progresie aritmetică** un şir de numere reale în care fiecare termen, începînd cu al doilea, se obţine din termenul precedent prin adăugarea aceluiaşi număr.

Şirul de numere $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este o progresie aritmetică dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $a_{k+1} = a_k + r$, unde *r* este un număr real. Numărul *r* se numeşte ***raţia progresiei aritmetice***, iar a_1 este ***primul termen*** al acesteia.

O progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ este complet determinată, dacă se cunosc primul termen a_1 şi raţia *r*.

Dacă:
- $r > 0$, atunci progresia aritmetică este ***strict crescătoare***;
- $r < 0$, atunci progresia aritmetică este ***strict descrescătoare***;
- $r = 0$, atunci progresia aritmetică este ***constantă***.

Exemple

1. Pentru $a_1 = 1$, $r = 2$, obţinem progresia aritmetică $1, 3, 5, 7, \ldots$

2. Dacă $a_1 = 1$, $r = -3$, atunci avem progresia aritmetică $1, -2, -5, -8, \ldots$

3. Pentru $a_1 = 7$, $r = 0$, obţinem progresia aritmetică $7, 7, 7, \ldots$

Definiție. Se spune că numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt **numere în progresie aritmetică** dacă ele sînt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Progresia aritmetică posedă o proprietate importantă, care îi justifică denumirea.

Teorema 4. Orice termen al unei progresii aritmetice $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...,$ începînd cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \ \forall n \geq 2.$$

Exercițiu. Demonstrați teorema 4.

Este adevărată și

Reciproca teoremei 4. Dacă fiecare termen al unui șir de numere reale, începînd cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini, atunci acest șir este o progresie aritmetică.

Demonstrație

Să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui șir oarecare $(a_n)_{n\geq 1}$ are loc relația: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \ n \geq 2.$

Atunci $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$ de unde obținem

$$a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \quad \text{sau} \quad a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Aceasta înseamnă că diferența dintre orice termen al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ și predecesorul său este un număr constant, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică. ►

2.1.2. Formula termenului general al unei progresii aritmetice

Fie a_1 primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, iar r rația ei. Atunci, conform definiției progresiei aritmetice, avem:

$$a_2 = a_1 + r,$$
$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r,$$
$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Teorema 5. Termenul general al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.} \qquad (1)$$

Demonstrație

Vom demonstra formula (1) prin metoda inducției matematice.

Notăm prin $A(n)$ afirmația din egalitatea (1).

1. Pentru $n = 1$, afirmația $A(1)$ este adevărată.

2. Fie afirmația $A(k)$ adevărată pentru $k \geq 1$, adică, $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r.$

Să demonstrăm că este adevărată și afirmația $A(k+1)$.

Într-adevăr, $a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1) \cdot r + r = a_1 + k \cdot r.$

3. Conform metodei inducţiei matematice, afirmaţia $A(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n. ►

Observaţie. Progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ de raţie r poate fi definită prin relaţia de recurenţă $a_{n+1}=a_n+r$, $\forall n\ge1$, sau prin relaţia de recurenţă $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$, $\forall n\ge1$, şi primul termen a_1.

2.1.3. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Teorema 6. Fie numerele reale $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ în progresie aritmetică. Atunci suma termenilor egal depărtaţi de termenii extremi este egală cu suma termenilor extremi: $a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n$, pentru orice $k\ge1$.

Demonstraţie

Fie numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ în progresie aritmetică. Dacă r este raţia progresiei, atunci

$$a_k=a_1+(k-1)\cdot r \quad \text{şi} \quad a_{n-k+1}=a_1+(n-k)\cdot r,$$

de unde $a_k+a_{n-k+1}=[a_1+(k-1)r]+[a_1+(n-k)r]=2a_1+(n-1)r$.

Dar $a_1+a_n=a_1+[a_1+(n-1)r]=2a_1+(n-1)r$.

Astfel, obţinem egalitatea $a_k+a_{n-k+1}=2a_1+(n-1)r=a_1+a_n$. ►

Folosind teorema 6, se obţine uşor formula generală pentru suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice.

Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$ şi o scriem de două ori astfel:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$
$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3+a_2+a_1.$$

Adunînd aceste două egalităţi membru cu membru, obţinem:

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+...+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Conform teoremei 6:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=...=a_{n-2}+a_3=a_{n-1}+a_n.$$

De aceea $2S_n=n(a_1+a_n)$, de unde $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

***Reţineţi*:** $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ (2) – formula sumei primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$.

$S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n$ (3) – formula de calcul al sumei primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, aplicabilă în cazul în care se cunosc primul termen a_1 şi raţia r.

Exerciţiu. Demonstraţi formula (3).

Exerciții rezolvate

1. Să se afle suma numerelor naturale de la 1 la 100.

Rezolvare:

Aceste 100 de numere sînt în progresie aritmetică. Primul termen al progresiei este 1, iar ultimul termen este 100.

Deci, $S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5\,050.$

2. Să se afle primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_{10} = 131$, $r = 12$.

Rezolvare:

Aplicînd formula (1), obținem: $131 = a_1 + (10-1)\cdot 12 \Leftrightarrow 131 = a_1 + 108 \Leftrightarrow a_1 = 23.$

3. Să se afle primul termen şi rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_5 = 27$, $a_{27} = 60$.

Rezolvare:

Folosind formula (1), avem: $\begin{cases} a_1 + 4r = 27, \\ a_1 + 26r = 60. \end{cases}$

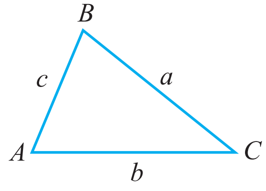
Rezolvăm sistemul şi obținem $a_1 = 21$, $r = 1{,}5$.

4. Să se calculeze suma primilor 100 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 10$, $a_{100} = 150$.

Rezolvare:

Aplicînd formula (2), obținem: $S_{100} = \frac{10+150}{2} \cdot 100 = 80 \cdot 100 = 8\,000.$

5. Să se demonstreze că dacă cotangentele unghiurilor triunghiului ABC sînt în progresie aritmetică, atunci pătratul lungimilor laturilor respective ale acestui triunghi de asemenea sînt în progresie aritmetică.



Rezolvare:

Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC. Din condiția problemei avem, de exemplu, $\mathrm{ctg}A - \mathrm{ctg}B = \mathrm{ctg}B - \mathrm{ctg}C \Leftrightarrow \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\cos C}{\sin C} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin B \cos A - \sin A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\sin C \cos B - \sin B \cos C}{\sin B \sin C}.$

De aici obținem $\frac{\sin(B-A)}{\sin A} = \frac{\sin(C-B)}{\sin C}.$

Deoarece $\sin C = \sin(B+A)$, $\sin A = \sin(B+C)$, obținem

$\sin(B-A)\sin(B+A) = \sin(C-B)\sin(C+B) \Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 B - \sin^2 C.$

Dar $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$. Astfel, rezultă că $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$. Prin urmare, pătratul lungimilor laturilor triunghiului, a^2, b^2, c^2, sînt în progresie aritmetică.

2.2. Progresii geometrice

LEGENDA JOCULUI DE ŞAH

O legendă spune că jocul de şah a fost inventat în India de înţeleptul Sessa, în secolul al IV-lea. Încîntat de joc, regele hindus a vrut sa-l răsplătească pe inventator şi a rămas uimit auzind că acesta cere să i se dea un bob de grîu pentru primul pătrat al tablei de şah, 2 boabe – pentru al doilea pătrat, 4 – pentru al treilea, 8 – pentru al patrulea ş.a.m.d. pînă la pătratul al 64-lea. Această doleanţă i s-a părut regelui foarte modestă. Oare aşa să fie?

2.2.1. Noţiunea de progresie geometrică

Fie şirul de numere reale $(b_n)_{n\geq 1}$, astfel încît $b_1 = 3$ şi $b_{n+1} = b_n \cdot 4$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci $b_1 = 3$, $b_2 = b_1 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$, $b_3 = b_2 \cdot 4 = 12 \cdot 4 = 48$, $b_4 = b_3 \cdot 4 = 48 \cdot 4 = 192, \ldots$

Observăm că fiecare termen al acestui şir, începînd cu al doilea, se obţine prin înmulţirea termenului precedent cu acelaşi număr, şi anume 4.

Definiţie. Se numeşte **progresie geometrică** un şir de numere reale al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen al său, începînd cu al doilea, se obţine din termenul precedent prin înmulţirea cu acelaşi număr nenul.

Şirul de numere $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ $(b_1 \in \mathbb{R}^*)$, este o progresie geometrică dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $b_{k+1} = b_k \cdot q$, $q \in \mathbb{R}^*$.

Numărul q se numeşte ***raţia progresiei geometrice***, iar b_1 este ***primul termen*** al ei.

O progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ este complet determinată dacă se cunosc primul termen b_1 şi raţia q.

Definiţie. Se spune că numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt **numere în progresie geometrică** dacă ele sînt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Exemple

1. Pentru $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ obţinem progresia geometrică $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

2. Pentru $b_1 = 2$, $q = -2$ obţinem progresia geometrică $2, -4, 8, -16, 32, \ldots$

Progresia geometrică cu termeni pozitivi posedă o proprietate importantă, care îi justifică denumirea.

Teorema 7. Orice termen al unei progresii geometrice cu termeni pozitivi $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots$, începînd cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$.

Demonstraţie

Conform definiţiei progresiei geometrice, pentru orice $n \geq 2$, $b_n = b_{n-1} \cdot q$ şi $b_n = \frac{b_{n+1}}{q}$.

Atunci $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, de unde $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Deoarece $b_n > 0$, obţinem $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. ►

Observație. Relația $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (sau $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$) este adevărată pentru oricare progresie geometrică.

Este adevărată şi

Reciproca teoremei 7. Dacă fiecare termen al unui şir de numere reale pozitive, începînd cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini, atunci acest şir este o progresie geometrică.

Exercițiu. Demonstrați reciproca teoremei 7.

2.2.2. Formula termenului general al unei progresii geometrice

Fie b_1 primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ şi q rația ei. Atunci, din definiția progresiei geometrice, avem:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Teorema 8. Termenul general al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula: $$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.} \quad (4)$$

Demonstrație

Vom aplica metoda inducției matematice.

Notăm cu $P(n)$ afirmația din egalitatea (4).

1. Pentru $n = 1$, afirmația $P(1)$ este evidentă.

2. Fie afirmația $P(k)$ adevărată pentru $k \geq 1$, adică $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$.

Să demonstrăm că este adevărată afirmația $P(k+1)$.

Într-adevăr, $b_{k+1} = b_k q = (b_1 q^{k-1}) q = b_1 q^k$.

3. Conform metodei inducției matematice, afirmația $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n. ►

Observație. Progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ de rație q poate fi definită prin relația de recurență $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $\forall n \geq 1$, şi primul termen b_1.

2.2.3. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu primul termen b_1 şi rația q.

Observație. Ca şi pentru numere în progresie aritmetică, pentru numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$, care sînt în progresie geometrică, are loc relația:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n,$$

adică produsul termenilor egal depărtați de extremi este egal cu produsul termenilor extremi.

Fie suma primilor n termeni ai acestei progresii:

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n. \quad (5)$$

Pentru a calcula S_n, examinăm două cazuri:
1) rația $q=1$; atunci $S_n=b_1\cdot n$.
2) rația $q\neq 1$. Atunci înmulțim ambii membri ai egalității (5) cu q şi obținem:

$$qS_n=b_1q+b_2q+\ldots+b_{n-1}q+b_nq.$$

Dar $b_1q=b_2$, $b_2q=b_3$, ..., $b_{n-1}q=b_n$, de aceea

$$qS_n=b_2+b_3+\ldots+b_n+b_nq. \quad (6)$$

Scăzînd membru cu membru (5) din (6), obținem:

$$qS_n-S_n=b_nq-b_1 \Leftrightarrow S_n\cdot(q-1)=b_nq-b_1.$$

Deoarece $q\neq 1$, $S_n=\dfrac{b_nq-b_1}{q-1}=\dfrac{b_1-b_nq}{1-q}$.

Rețineți: $S_n=\dfrac{b_1-b_nq}{1-q}$, $q\neq 1$ – formula sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$.

$S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q\neq 1$ (7) – formula de calcul al sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice, aplicabilă în cazul în care se cunosc primul termen b_1 şi rația q.

Exercițiu. Demonstrați formula (7).

Să revenim la legenda jocului de şah.

Pentru a răspunde la întrebare, trebuie să aflăm numărul de boabe de grîu, adică să calculăm suma $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$.

Avem: $b_1=1$, $q=2$, $b_{64}=2^{63}$.

Obținem $S_{64}=\dfrac{2^{63}\cdot 2-1}{2-1}=2^{64}-1=18446744073709551615.$

Am obținut un număr natural de 20 de cifre. Considerînd că 30 000 000 de boabe de grîu cîntăresc aproximativ o tonă, ne convingem că doleanța lui Sessa nu a putut fi îndeplinită. (Comparați: producția mondială de grîu în anul agricol 2012–2013 a constituit circa 700 000 000 t, iar înțeleptul a cerut aproximativ 614 miliarde de tone.)

Progresia geometrică: • cu $b_1>0$, $q>1$ sau cu $b_1<0$, $0<q<1$ este ***strict crescătoare***;

• cu $b_1<0$, $q>1$ sau cu $b_1>0$, $0<q<1$ este ***strict descrescătoare***;

• cu $q<0$ nu este monotonă;

• cu $q=1$ este ***constantă***.

Exercițiu. Dați cîte un exemplu pentru fiecare caz.

Progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ se numeşte ***infinit descrescătoare*** dacă rația q verifică relația $|q|<1$. Pentru progresia geometrică infinit descrescătoare $(b_n)_{n\geq 1}$, obținem:

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n.$$

Cînd n creşte, q^n tinde la zero („se apropie” de zero), deoarece $|q|<1$, iar suma S_n tinde la valoarea expresiei $\frac{b_1}{1-q}$. (A se vedea şi §3, secvenţa 3.3.)

Exerciţii rezolvate

1. Să se afle primul termen şi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, dacă $\begin{cases} b_2-b_1=-4, \\ b_3-b_1=8. \end{cases}$

Rezolvare:

Folosind formula (4), scriem sistemul: $\begin{cases} b_1q-b_1=-4, \\ b_1q^2-b_1=8. \end{cases}$

Rezolvînd acest sistem, obţinem $b_1=1,\ \ q=-3.$

2. Un turist, urcînd pe munte, în prima oră a parcurs o distanţă de 800 m. În fiecare oră următoare el a parcurs o distanţă cu 25 m mai mică decît în ora precedentă. În cîte ore turistul a parcurs distanţa de 5 700 m?

Rezolvare:

Numerele 800, 775, 750, ... sînt în progresie aritmetică. Astfel, $a_1=800,\ r=-25.$ Din condiţia problemei rezultă sistemul: $\begin{cases} a_n=x=800-25(n-1), \\ S_n=\dfrac{800+x}{2}\cdot n=5\,700. \end{cases}$

Rezolvăm acest sistem şi obţinem $x=1\,625$ m, $n=8$ ore.

Răspuns: 8 ore.

3. Să se determine numerele pozitive x, y, z care satisfac simultan condiţiile:

1) $x,\ y,\ z$ sînt în progresie geometrică;

2) $x,\ y+4,\ z$ sînt în progresie aritmetică;

3) $x,\ y+4,\ z+32$ sînt în progresie geometrică.

Rezolvare:

Obţinem sistemul: $\begin{cases} xz=y^2 \\ x+z=2(y+4) \\ x(z+32)=(y+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz=y^2 \\ y=4x-2 \\ z=2y-x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2-20x+4=0, \\ y=4x-2, \\ z=7x+4. \end{cases}$

Rezolvînd ultimul sistem, obţinem soluţia $x=2,\ \ y=6,\ \ z=18.$

Exerciţii propuse

A

1. Să se scrie formula termenului general al şirului:

a) 3, –3, 3, –3, …; b) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \ldots;$ c) $\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \ldots;$ d) 1, 9, 25, 49, 81, …

2. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, dacă:

a) $a_1=7,\ r=2;$ b) $a_1=-3,\ r=5;$ c) $a_1=1{,}3,\ r=0{,}3;$ d) $a_1=\frac{2}{7},\ a_2=\frac{1}{5}.$

3. Să se afle termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, dacă:

a) $a_{10}=131,\ r=12;$ b) $a_{200}=0,\ r=-3.$

4. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, dacă:

a) $b_1=-10,\ q=\frac{1}{2};$ b) $b_1=\frac{1}{2},\ q=\sqrt{3}.$

5. Pentru a construi o seră, se folosesc piloni instalați vertical. Cel mai scurt pilon are înălțimea de 5 dm, iar fiecare dintre pilonii următori este cu 3 dm mai înalt decît precedentul. Aflați înălțimea celui mai înalt pilon, al şaptelea.

6. Într-un amfiteatru sînt 10 rînduri. În primul rînd sînt 100 de locuri, iar în fiecare dintre rîndurile următoare – cu 20 de locuri mai mult decît în cel precedent. Cîte locuri sînt în total în amfiteatru?

7. O bancă dă o dobîndă anuală de 9%. Ce sumă va primi peste 5 ani o persoană care a depus la bancă 2700 lei, dacă dobînda calculată în fiecare an se adaugă la suma existentă?

8. Vara, la munte, odată cu creşterea altitudinii cu cîte 100 m, temperatura aerului scade cu 0,7°C. La poalele muntelui sînt 26°C. La ce altitudine se află un turist, dacă termometrul indică 14,8°C?

9. Fîntînarilor angajați la săparea unei fîntîni li s-a promis 150 lei pentru primul metru săpat, iar pentru fiecare metru săpat în continuare – cu 60 lei mai mult decît pentru cel precedent. Să se afle ce sumă de bani vor cîştiga fîntînarii, dacă adîncimea fîntînii va fi de 12 metri.

10. În condiții favorabile, în fiecare oră, orice bacterie se divizează în altele două. Cîte bacterii se vor reproduce dintr-o bacterie timp de 10 ore?

B

11. Să se afle suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă $\dfrac{b_1+b_2}{b_2+b_3}=\dfrac{1}{3}$ şi $b_1+b_2+b_3=52$.

12. Să se determine formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ şi S_n, dacă:

a) $a_1=-4,\ r=\dfrac{1}{3},\ n=14$; b) $a_1=\dfrac{3}{5},\ r=\dfrac{1}{7},\ n=25$.

13. Să se demonstreze că dacă numerele a, b, c sînt în progresie aritmetică, atunci şi numerele $a^2-bc,\ b^2-ac,\ c^2-ab$ sînt în progresie aritmetică.

14. Să se scrie formula termenului de rang n al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă:

a) $b_1=9,\ b_{n+1}=2b_n$; b) $b_1=10,\ b_{n+1}=\dfrac{1}{5}b_n$.

15. Să se afle primul termen şi rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă:

a) $b_4=-12,\ b_7=23\dfrac{7}{16}$; b) $b_1+b_4=\dfrac{7}{16},\ b_3-b_2+b_1=\dfrac{7}{8}$.

16. Fie o progresie geometrică cu $S_3=40,\ S_6=60.$ Să se afle S_9.

17. Să se determine numerele $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ care satisfac simultan condițiile:

a) $x,\ y,\ z$ sînt în progresie geometrică;

b) $x,\ y+a,\ z$ sînt în progresie aritmetică;

c) $x,\ y+a,\ z+b$ sînt în progresie geometrică.

18. Să se afle valorile lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $2x-1,\ 2x+1,\ x+26$ sînt în progresie geometrică.

19. Să se determine primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă:

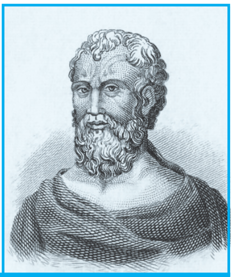
a) $S_4=12,\ q=3$; b) $S_6=1,\ q=-2$.

20. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $1+7+13+\ldots+x=280$.

21. Lungimile laturilor triunghiului ABC, considerate în ordine consecutivă, sînt în progresie geometrică crescătoare. Rația acestei progresii este mai mică sau mai mare decît 2?

22. Să se reprezinte numărul 180 ca suma a patru numere reale pozitive, care sînt în progresie geometrică cu rația $q\neq 1$, dacă se ştie că termenul al treilea este cu 36 mai mare decît primul termen. Să se găsească două posibilități.

§ 3 Limita unui şir. Şiruri convergente, şiruri divergente



Zenon din Elea

În Antichitate, matematicienii greci Arhimede, Zenon din Elea[1] şi alţii au utilizat şirurile numerice pentru a obţine aproximări cît mai bune ale unor mărimi. Mult mai tîrziu, s-au introdus conceptele de şir convergent şi limită.

3.1. Noţiunea de limită a unui şir

Se numeşte ***vecinătate a unui punct*** $a \in \mathbb{R}$ orice interval deschis de forma $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Vecinătatea punctului a se notează cu $U(a, \varepsilon)$ sau $V(a, \varepsilon)$.

Prin urmare, $U(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \,\|\, |x-a| < \varepsilon\}$.

Vom spune că un punct x_0 este ***punct interior*** al mulţimii X, $X \subseteq \mathbb{R}$, dacă există o vecinătate $U(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a acestui punct, astfel încît $U(x_0, \varepsilon) \subset X$.

Definiţie (în limbajul vecinătăţilor). Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale şi a un număr real. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are **limita** a dacă în orice vecinătate a punctului a se conţin toţi termenii şirului cu excepţia, poate, a unui număr finit de termeni.

Faptul că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita a se scrie: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (se citeşte: „limita şirului x_n cînd n tinde la infinit este egală cu a”) sau $x_n \to a$ cînd $n \to \infty$ (se citeşte: „x_n tinde la a cînd n tinde la ∞”).

Observaţie. Se scrie $n \to \infty$, şi nu $n \to +\infty$, deoarece n este număr natural şi nu este pericol de confuzie.

Definiţie (în limbajul ε). Numărul $a \in \mathbb{R}$ este **limita** şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încît $|x_n - a| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$.

Observaţii. **1.** Dacă negăm în definiţia cu „ε”, obţinem: Numărul $a \in \mathbb{R}$ nu este limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă $\exists \varepsilon_0 > 0$, astfel încît $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists n_0 > n$ cu proprietatea $|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.

2. În definiţia în limbajul ε se poate înlocui ε cu $\alpha\varepsilon$, unde numărul real $\alpha > 0$ este fixat. Atunci putem formula definiţia în limbajul ε astfel: numărul $a \in \mathbb{R}$ este limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încît $|x_n - a| < \alpha\varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon$, unde $\alpha > 0$.

Exerciţii rezolvate

1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstraţie

Fie U o vecinătate arbitrară a punctului 0, $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încît $n > \frac{1}{\varepsilon}$, adică $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Deci, $x_n = \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) = U$ dacă $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Aşadar, termenii şirului $(x_n)_{n\geq 1}$,

[1] Zenon din Elea (cca 490 – cca 430 î.H.) – filozof şi matematician grec.

începînd cu rangul $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, se află în vecinătatea U a punctului 0.

Prin urmare, numărul 0 este limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$.

Rețineți: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

2. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2.$

Demonstrație

Vom demonstra că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încît oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, se verifică inegalitatea $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right| < \varepsilon$. Evaluăm $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ cerem ca $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Dacă $\varepsilon > \frac{1}{2}$, atunci inegalitatea $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ este verificată de orice $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, atunci ea este verificată de orice $n > \frac{1}{\varepsilon}-1$, $n\in\mathbb{N}^*$, de aceea în acest caz considerăm $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încît $\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right| < \varepsilon$, oricare ar fi n, $n > n_\varepsilon$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2.$

3. Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = (-1)^n$ nu are limită.

Demonstrație

Presupunem contrariul, că există un număr $a\in\mathbb{R}$, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = a$. Conform definiției limitei, pentru orice $\varepsilon > 0$, în particular pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încît $|x_n - a| < \frac{1}{2}$, $\forall n > n_\varepsilon$. Deoarece $x_n \in \{-1, 1\}$, rezultă că au loc simultan inegalitățile $|1-a| < \frac{1}{2}$ şi $|-1-a| < \frac{1}{2}$. Obținem că $2 = |(1-a)+(a+1)| \leq |1-a|+|1+a| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, adică $2 < 1$. Absurd. Deci, şirul dat nu posedă limită.

4. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

Demonstrație

Vom demonstra că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încît oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| < \varepsilon$, $\alpha > 0$.

Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$, luînd în considerație că $\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ şi rezolvînd inecuația $\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| < \varepsilon$ cu necunoscuta n, obținem $n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$. Observăm că $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\right]$ este un număr natural. Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\right] \in \mathbb{N}^*$, astfel încît $\left|\dfrac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$.

Rețineți: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$.

Exercițiu. Folosind definiția în limbajul vecinătăților, demonstrați că şirul $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = (-1)^n$, nu are limită.

Definiții. • Se spune că şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$ are **limita plus infinit** şi se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încît $x_n > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

• Se spune că şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$ are **limita minus infinit** şi se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încît $x_n < -\varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

• Se spune că şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$ are **limită infinită** şi se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încît $|x_n| > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

Observație. Evident, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Exemple

1. Fie $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = n^2$. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. Fie $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = -2^n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

3. Pentru şirul $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = (-1)^n \cdot n$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Exercițiu rezolvat

Considerăm şirul $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = q^n$, $q < -1$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Rezolvare:

Conform definiției, vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încît $|q^n| > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$. Relația $|q^n| > \varepsilon$ este echivalentă cu $|q|^n > \varepsilon$. Logaritmînd inegalitatea în baza $|q|$, $|q| > 1$, obținem:

$$\log_{|q|} |q|^n > \log_{|q|} \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{|q|} \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$, astfel încît $|q^n| > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$. Conform definiției, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

La demonstrația teoremelor şi la rezolvarea exemplelor cu limite infinite uneori vom utiliza următoarele mulțimi:

$$U(+\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \varepsilon, \varepsilon > 0\};$$
$$U(-\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\varepsilon, \varepsilon > 0\};$$
$$U(\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \varepsilon, \varepsilon > 0\},$$

care se mai numesc ***vecinătăți***, respectiv, ale lui $+\infty$, $-\infty$ şi ∞.

În definițiile vecinătăților simbolurilor $+\infty$ şi $-\infty$, condiția $\varepsilon > 0$ uneori poate fi omisă. Această condiție este introdusă doar pentru a uniformiza formulările noțiunilor. Deci, vecinătatea oricărui număr finit, a lui $+\infty$, $-\infty$ şi ∞ se determină cu ajutorul unui număr pozitiv. Această convenție este comodă uneori la formularea rezultatelor în care nu este esențial dacă limita este finită sau infinită. Aplicînd această terminologie, definiția limitei finite sau a oricărei limite infinite poate fi formulată astfel:

Definiții. • Se spune că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ **are limita *a*** (unde a este număr finit, $+\infty$, $-\infty$ sau ∞) dacă pentru orice vecinătate $U(a, \varepsilon)$ a lui a există numărul natural n_u, astfel încît $x_n \in U$ oricare ar fi $n > n_u$.

• Şirul care are limită finită se numeşte **şir convergent**. Şirul care nu este convergent (adică şirul care nu are limită sau are limita infinită) se numeşte **şir divergent**.

Teorema 9. Dacă un şir de numere reale are limită, atunci această limită este unică.

Teorema 10 (Weierstrass[1]). Orice şir numeric monoton şi mărginit este convergent.


Karl Weierstrass

Demonstrație

Să considerăm cazul şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ crescător şi mărginit superior. Atunci $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Conform ipotezei, mulțimea $\{x_n \mid n \geq 1\}$ este nevidă şi mărginită. Fie $x_0 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Conform teoremei de caracterizare a marginii superioare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un rang n_ε, astfel încît $x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător, deci $x_n > x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$ pentru orice $n > n_\varepsilon$. Pe de altă parte, din condiția că x_0 este marginea superioară, $x_n \leq x_0 < x_0 + \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, pentru orice $n > n_\varepsilon$ avem $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ sau $|x_n - x_0| < \varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, şi, cum $x_0 \in \mathbb{R}$, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Analog se demonstrează cazul şirului descrescător şi mărginit inferior. ►

Exercițiu rezolvat

Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit de $x_1 = \sqrt{2}$ şi relația de recurență $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $\forall n \geq 1$, este convergent.

Rezolvare:

Să demonstrăm că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător. Considerăm diferența $x_{n+1}^2 - x_n^2$. Obținem: $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2 = (1 + x_n)(2 - x_n) > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Din ultima relație avem $x_{n+1}^2 > x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obținem $x_{n+1} > x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, şirul este crescător.

Folosind metoda inducției matematice, să demonstrăm că şirul este mărginit superior.

Avem $x_1 = \sqrt{2} < 2$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

Presupunem că $x_n < 2$. Atunci $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

---

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) – matematician german.

Prin urmare, conform metodei inducției matematice, $x_n < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Conform teoremei lui Weierstrass, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, fiind monoton crescător şi mărginit superior, este convergent.

***Observații.* 1.** În demonstrația teoremei 10 am obținut că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n)$, dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, atunci analog se obține $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n)$.

2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, atunci se mai spune că ***şirul*** $(x_n)_{n\geq 1}$ ***converge*** la numărul a.

Teorema 11. Un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la x_0 dacă şi numai dacă orice subşir $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge la x_0. Adică $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, pentru orice $(x_{n_k})_{k\geq 1}$.

Observație. Din teorema 11 rezultă că pentru ca un şir numeric să nu aibă limită, este suficient ca el să conțină două subşiruri cu limite diferite.

3.2. Proprietăți ale şirurilor convergente

Fie şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$. Şirurile $(\lambda \cdot x_n)_{n\geq 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$; $(x_n \cdot y_n)_{n\geq 1}$; $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 1}$, $y_n \neq 0$, $\forall_n \in \mathbb{N}^*$; $(x_n^{y_n})_{n\geq 1}$, $\forall x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, se numesc respectiv ***produsul unui şir cu o constantă, şir-sumă, şir-produs, şir-cît, şirul puterilor***.

Apare în mod firesc întrebarea: ce se poate spune despre limita şirurilor definite mai sus, în cazul în care şirurile inițiale au limită, şi, dacă au limită, cum se calculează limita lor.

Teorema 12

1. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci şirul $(\lambda \cdot x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot a = \lambda \cdot \lim\limits_{n+\infty} x_n$, adică *factorul constant poate fi extras de sub semnul limitei*.

2. Dacă şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sînt convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, atunci şirul $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, adică *limita sumei a două şiruri convergente este egală cu suma limitelor acestor şiruri*.

3. Dacă şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sînt convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, atunci şirul $(x_n \cdot y_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, adică limita *produsului a două şiruri convergente este egală cu produsul limitelor acestor şiruri*.

4. Dacă şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sînt convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ $(y_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*)$ şi $b \neq 0$, atunci şirul-cît $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, adică *limita cîtului a două şiruri convergente este egală cu cîtul limitelor acestor şiruri*.

3.3. Suma unei progresii geometrice infinit descrescătoare

Teorema 13. Fie şirul $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = b_1 + b_1 q + ... + b_1 q^{n-1}$, unde $0 < |q| < 1$ şi $b_1 \neq 0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Demonstrație

Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice infinit descrescătoare $b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ ...$ poate fi scrisă sub forma $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_1 q^{i-1},\ |q|<1$.

Ştiind că $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ |q|<1$, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{b_1}{1-q},\ \text{deoarece}\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$ ►

3.4. Numărul *e*

Teorema 14. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, este convergent.

Demonstrație

Vom aplica teorema 10 (Weierstrass) din secvența 3.1 şi *inegalitatea mediilor*:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},\quad a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Vom arăta că şirul $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n\geq 1$, este monoton şi mărginit.

Studiem monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Considerăm numerele $\underbrace{1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, ..., 1+\frac{1}{n}}_{n\ \text{ori}}, 1.$

Conform inegalității mediilor, pentru aceste $n+1$ numere pozitive avem:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad \forall n\geq 1.$$

Prin urmare, $x_n < x_{n+1},\ \forall n\geq 1$, de unde rezultă că şirul dat este strict crescător.

Să demonstrăm că şirul este mărginit superior. Considerăm următoarele $n+2$ numere pozitive $\underbrace{1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, ..., 1+\frac{1}{n}}_{n\ \text{ori}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$

Din inegalitatea mediilor, aplicată acestor $n+2$ numere, rezultă

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4, \ \forall n \geq 1.$$

Deci, şirul este mărginit superior.

Conform teoremei lui Weierstrass, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, fiind monoton crescător şi mărginit superior, este convergent. ►

Limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, se notează cu e, după iniţiala numelui lui L. Euler[1], şi reprezintă un număr iraţional care aparţine intervalului (2, 3). Iraţionalitatea numărului e a fost demonstrată în 1815 de J. Fourier[2]. În 1728, D. Bernoulli[3] a stabilit că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284590...$$


Leonard Euler


Daniel Bernoulli


Jean-Baptiste Joseph Fourier

Reţineţi: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$ (8)

Observaţie. Numărul e este o constantă fundamentală în analiza matematică. Logaritmul în baza e are aplicaţii în matematică, fizică şi în multe alte domenii, se numeşte ***logaritm natural*** şi se notează $\ln x \ (= \log_e x)$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1}$.

Rezolvare:

Aplicînd teorema 11 şi relaţia (8), obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+7}\right)^{6n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7}{1}\cdot\frac{1}{3n+7}\cdot(6n+1)} =$$

---

[1] Leonard Euler (1707–1783) – matematician, fizician şi astronom elveţian.
[2] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) – matematician francez.
[3] Daniel Bernoulli (1700–1782) – matematician şi fizician elveţian.

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7}{1}}\right\}^{\frac{1(6n+1)}{3n+7}}=e^2.$$

2. Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, dacă:

a) $x_n=\sqrt{n^2+2n-3}-n;$ b) $x_n=\dfrac{n+2}{3n+1};$

c) $x_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n};$ d) $x_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}.$

Rezolvare:

a) Amplificăm cu conjugatul expresiei:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-3}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n-3)-n^2}{\sqrt{n^2+2n-3}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{\sqrt{n^2+2n-3}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+1\right)}=1.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1+0}{3+0}=\frac{1}{3}.$$

c) Amplificăm cu conjugatul expresiei de la numărător:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0.$$

d) Folosim formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}=\frac{4}{3}.$$

Exerciţii propuse

B

1. Să se aducă exemple de şiruri numerice convergente, divergente.

2. Folosind noţiunea de subşir, să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1},\ x_n=(-1)^n,$ este divergent.

3. Aplicînd definiţia limitei şirului numeric, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{n}=4;$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2}=2;$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{4n+5}=\dfrac{1}{2};$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+6}{n+1}=5.$

4. Folosind definiţia limitei şirului, să se arate că: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}\neq\dfrac{1}{2};$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{5n+1}\neq 1.$

5. Aplicînd teorema lui Weierstrass, să se demonstreze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1},$ dacă:

a) $x_n=\dfrac{2n+1}{n+1};$ b) $x_n=1+\dfrac{1}{3^n};$ c) $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}.$

6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1};$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2+n};$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{3^n};$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3n+1};$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{C_n^2}{2^n}\right);$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;$ g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5\cdot 2^n}{4^n+5^{n+1}};$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-n);$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^n}};$ j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n};$ k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{n};$

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{2n^2+1}+\dfrac{\sqrt{n}+2}{n+3}\right);$ m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^n;$ n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}.$

Exerciţii şi probleme recapitulative

A

1. Să se scrie primii cinci termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general:

a) $x_n=\dfrac{3n-2}{2+n};$ b) $x_n=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\cdot n\right);$ c) $x_n=(-1)^n\cdot 7+\dfrac{1}{n}.$

2. Să se determine formula termenului de rang n pentru şirul:

a) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{6},\ \ldots;$ b) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots;$ c) $3, -3, 3, -3, \ldots;$ d) $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{27},\ \dfrac{1}{81},\ \ldots$

3. Să se dea exemple de şiruri numerice: a) finite; b) infinite; c) monotone.

4. Să se decidă dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1},\ x_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n,$ este monoton.

5. Să se scrie formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă:

a) $a_1=-2$ şi $r=-4;$ b) $a_1=1$ şi $r=2;$ c) $a_1=-10$ şi $r=5;$ d) $a_1=3$ şi $r=7.$

6. Să se afle suma primilor 100 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1},$ dacă:

a) $a_1=2,\ r=-5;$ b) $a_1=-1,\ r=1.$

7. Să se afle $x\in\mathbb{R},$ astfel încît numerele să fie în progresie aritmetică:

a) $1+x^2,\ (a+x)^2,\ (a^2+x)^2;$ b) $a^2+x,\ ab+x,\ b^2+x.$

8. Să se scrie formula termenului general al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă:

a) $b_1 = 2,\ q = 6;$ b) $b_1 = -10,\ q = \frac{1}{2};$ c) $b_1 = 3,\ q = 2.$

9. Să se decidă dacă este progresie aritmetică sau progresie geometrică şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dacă:

a) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 3x_n;$ b) $x_1 = 4,\ x_{n+1} = 2 + x_n;$ c) $x_1 = -4,\ x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n;$ d) $x_1 = -1,\ x_{n+1} = 5 + x_n.$

În caz afirmativ, să se indice formula termenului general al progresiei şi raţia.

10. Fie numerele $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ în progresie aritmetică.
a) Să se determine n şi S_n, dacă $a_n = 5,\ a_1 = 23,\ r = -2;$
b) Să se determine a_1 şi n, dacă $a_n = 18,\ r = 2,\ S_n = 88.$

11. Fie numerele $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n$ în progresie geometrică. Să se determine q şi S_n, dacă:
a) $b_n = 1280,\ b_1 = 5,\ n = 9;$ b) $b_n = 384,\ q = 2,\ n = 8.$

12. Un ciclist a parcurs în prima oră o distanţă de 8 km. În fiecare oră următoare, el a parcurs o distanţă cu 2 km mai mare decît în ora precedentă. În cîte ore ciclistul a parcurs distanţa de 60 km?

13. În cădere liberă într-o mină, o piatră parcurge în prima secundă 4,9 m şi viteza ei creşte cu 9,8 m/s. Să se afle adîncimea minei, dacă piatra a ajuns la fund peste 8 s.

14. Să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $2x - 2,\ x^2 + 1,\ 3x^2 - 1$ sînt în progresie aritmetică.

15. Să se extragă subşiruri din şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dacă:

a) $x_n = 1 + (-1)^n;$ b) $x_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n};$ c) $x_n = n \cdot \sin\frac{n\pi}{2};$ d) $x_n = \cos n\pi;$ e) $x_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}.$

B

16. Lungimile laturilor unui triunghi sînt în progresie aritmetică cu raţia 2. Cosinusul celui mai mic unghi al acestui triunghi este egal cu $\frac{4}{5}$. Să se afle perimetrul triunghiului.

17. Folosind definiţia limitei şirului, să se arate că: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2;$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+1} = 0.$

18. Aplicînd definiţia limitei şirului, să se arate că: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+1}{3n} \neq \frac{9}{4};$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1} \neq 1.$

19. Dintr-un vas plin ce conţinea 729 l de acid s-au luat a litri, apoi vasul a fost umplut cu apă. După obţinerea unei soluţii omogene, iarăşi s-au luat a litri şi vasul a fost umplut din nou cu apă. Această operaţie a fost repetată de 6 ori şi în final soluţia din vas conţinea 64 l de acid. Să se determine a.

20. Să se afle suma tuturor numerelor naturale de două cifre care, fiind împărţite la 4, dau restul 1.

21. Să se demonstreze că numerele $(a+x)^2,\ a^2 + x^2,\ (a-x)^2,\ a, x \in \mathbb{R}$, sînt în progresie aritmetică. Să se afle suma primilor n termeni ai progresiei, ştiind că $(a+x)^2$ este primul termen.

22. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{2^n+1};$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^3 - n^2 + 1);$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 3n - n^5);$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2-3n};$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1}\right);$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2};$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n;$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1};$ i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}).$

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

A

1. Scrieți primii 5 termeni ai șirului $(x_n)_{n\geq 1}$: ②
a) $x_n = \frac{3n-2}{n+2}$; b) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{3}$.

2. Studiați monotonia șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin formula $x_n = \frac{2n-1}{2n+1}$. ②

3. Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă: ②
$a_2 + a_4 = 16, \quad a_1 a_5 = 28.$

4. Determinați primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă: ②
$b_2 - b_1 = -4, \quad b_3 - b_1 = 8.$

5. Pentru a ridica un pian la etajul 2, s-au plătit 3 u.m., iar pentru a-l ridica la fiecare etaj următor – de 2 ori mai mult decît pentru etajul precedent. Determinați la ce etaj a fost ridicat pianul, dacă pentru ultimul etaj s-au plătit 48 u.m. ②

Timp efectiv de lucru: 90 de minute

B

1. Scrieți primii cinci termeni ai șirului $(x_n)_{n\geq 1}$: ①
$$x_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right).$$

2. Aflați termenul general al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă $b_1 = 4, \; b_{n+1} = (-3) \cdot b_n$. ①

3. Studiați monotonia șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin formula termenului general: ①
$$x_n = 1 + \frac{n}{n^2+1}.$$

4. Folosind teorema lui Weierstrass, demonstrați convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, ②
$x_n = \frac{10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (n+9)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$.

5. Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}, \; a_3 \cdot a_4 = \frac{65}{72}$. ①

6. Determinați primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă: ②
$b_4 - b_2 = -\frac{45}{32}, \; b_6 - b_4 = -\frac{405}{512}$.

7. Pentru confecționarea și instalarea inelului de jos al unei fîntîni s-au plătit 26 u.m., iar pentru fiecare inel următor – cu 2 u.m. mai puțin decît pentru cel precedent. Suplimentar, s-au mai plătit 40 u.m. Prețul mediu pentru confecționarea și instalarea unui inel este de $22\frac{4}{9}$ u.m. Aflați cîte inele au fost instalate. ②

Şiruri de numere reale

Şir numeric
$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

Notăm: $(x_n)_{n\geq 1}$

Moduri de definire a şirului
1) analitic;
2) prin descrierea termenilor şirului;
3) printr-o relaţie de recurenţă.

Şir-sumă
$(x_n + y_n)_{n\geq 1}$

Şir-produs
$(x_n \cdot y_n)_{n\geq 1}$

Şir-cît
$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 1}$

Şirul puterilor
$((x_n)^{y_n})_{n\geq 1}$

Şir monoton
crescător: $x_n \leq x_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

descrescător: $x_n \geq x_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Şir mărginit
superior:

$\exists M \in \mathbb{R}$: $x_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

inferior:

$\exists m \in \mathbb{R}$: $x_n \geq m, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Şiruri egale
$(x_n)_{n\geq 1}, \ (y_n)_{n\geq 1}$ sînt egale $\Leftrightarrow x_n = y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Teorema de caracterizare a marginii superioare a unei mulţimi
Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă mărginită superior. Numărul M^* este marginea superioară a mulţimii X dacă şi numai dacă:

1) $x \leq M^*$, pentru orice $x \in X$;

2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încît $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$.

Teorema de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi
Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă mărginită inferior. Numărul m^* este marginea inferioară a mulţimii X dacă şi numai dacă:

1) $x \geq m^*$, pentru orice $x \in X$;

2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încît $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$.

Teorema lui Weierstrass
Orice şir numeric monoton şi mărginit este convergent.

Proprietăţi ale şirurilor convergente
1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \ \lambda$ – const.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n} = [\lim\limits_{n\to\infty} x_n]^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

Progresie aritmetică
$a_n = a_1 + r(n-1), \ n \in \mathbb{N}^*$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \ n \in \mathbb{N}^*$

$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \ k \in \mathbb{N}^*$

Progresie geometrică
$b_n = b_1 q^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}^*$

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \ n \in \mathbb{N}^*$

$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}, \ k \in \mathbb{N}^*$

Inegalitatea mediilor
$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \ n \in \mathbb{N}^*$,

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$

Numărul *e*
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Modulul

2 Limite de funcții

Obiective

- *determinarea punctelor de acumulare şi a punctelor izolate ale unei mulțimi;
- aplicarea în diverse contexte a definițiilor limitei unei funcții într-un punct, *aplicarea în rezolvări de probleme a noțiunii de limite laterale, *identificarea funcțiilor care au limită şi care nu au limită în punct;
- *calculul limitelor de funcții elementare şi a limitelor de funcții compuse, *utilizarea în diverse contexte a criteriilor de existență a limitelor de funcții, *utilizarea în rezolvări de probleme a operațiilor algebrice cu limite de funcții;
- *aplicarea limitelor remarcabile la calculul limitelor de funcții, *recunoaşterea în diverse contexte a formelor exceptate şi aplicarea metodelor de înlăturare a acestora.

§1 Limita unei funcții într-un punct

1.1. Puncte de acumulare ale unei mulțimi

Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ o submulțime de numere reale şi $f\colon E \to \mathbb{R}$ o funcție. În acest modul vom studia comportarea funcției f în vecinătatea unui punct x_0, care, în caz general, nu aparține în mod necesar mulțimii E. Mai precis, vom studia ce se întîmplă cu valorile $f(x)$ ale funcției f dacă valorile argumentului x, $x \neq x_0$, sînt din ce în ce mai aproape de x_0. Pentru ca argumentul $x \in E$ să se poată apropia suficient de mult de x_0, este necesar ca în orice vecinătate a lui x_0 să existe puncte din mulțimea E, adică x_0 să fie punct de acumulare pentru E.

Definiție. Fie $E \subseteq \mathbb{R}$. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ se numeşte **punct de acumulare** pentru mulțimea E dacă în orice vecinătate a lui x_0 există cel puțin un punct din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$.

Deci, $x_0 \in \mathbb{R}$ este un ***punct de acumulare*** pentru mulțimea E dacă pentru orice vecinătate V a punctului x_0 are loc relația $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$. Prin urmare, $x_0 \in \mathbb{R}$ ***nu este punct de acumulare*** pentru mulțimea E dacă există o vecinătate V' a lui x_0 care nu conține nici un punct din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$, adică $V' \cap (E \setminus \{x_0\}) = \varnothing$. Punctul $x_0 \in E$, care nu este punct de acumulare pentru E, se numeşte ***punct izolat*** al mulțimii E.
Mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte ***mulțime închisă*** dacă ea îşi conține toate punctele de acumulare. Mulțimea mărginită şi închisă se numeşte ***mulțime compactă***.

Teorema 1. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Demonstrație

Necesitatea. Să admitem că x_0 este punct de acumulare pentru mulțimea E şi să considerăm vecinătățile $V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ale punctului x_0. Atunci în fiecare vecinătate V_n se află cel puțin un punct $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, adică $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$, de unde rezultă că $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ pentru orice $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Suficiența. Dacă mulțimea E conține un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termeni x_n, $x_n \neq x_0$, astfel încît $x_n \to x_0$ cînd $n \to \infty$, atunci din definiția limitei şirului numeric rezultă că pentru orice vecinătate V a lui x_0 toți termenii x_n ai acestui şir aparțin vecinătății V începînd cu un rang N. Prin urmare, $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$, adică x_0 este punct de acumulare pentru E. ►

Observație. Definiția punctului de acumulare şi teorema 1 rămîn adevărate şi pentru cazul în care x_0 este $+\infty$, $-\infty$ sau ∞. În aceste cazuri, în demonstrația teoremei 1 se vor considera, respectiv, vecinătățile $V_n = (n, +\infty)$, $V_n = (-\infty, -n)$ sau $V_n = (-\infty, -n) \cup (n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Exemple

1. Pentru $E = (a, b)$ sau $E = [a, b]$ orice punct $x_0 \in [a, b]$ este punct de acumulare.

2. Mulțimea $\mathbb{N}$ are punctul de acumulare $+\infty$. Toate punctele mulțimii $\mathbb{N}$ sînt pentru ea puncte izolate.

3. Mulțimea $E = [-2, 1) \cup \{3\}$ are în calitate de puncte de acumulare orice punct $x_0 \in [-2, 1]$, iar punctul $x_0 = 3$ este pentru ea un punct izolat.

4. Punctele 0 şi 1 sînt puncte de acumulare pentru mulțimea $E = \left\{-1,\ 2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{5}{4},\ -\frac{1}{5},\ \frac{6}{5},\ \ldots\right\}$, fiindcă această mulțime conține şirurile $(x'_n)_{n\geq 1}$, $x'_n = -\frac{1}{n}$, şi $(x''_n)_{n\geq 1}$, $x''_n = 1 + \frac{1}{n}$, pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = 1$, iar $x'_n \neq 0$, $x''_n \neq 1$, $\forall n \geq 1$. Toate punctele $x_0 \in E$ sînt pentru această mulțime puncte izolate.

1.2. Limita unei funcții într-un punct

Fie $E \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ o funcție, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E şi $l \in \mathbb{R}$. În cele ce urmează vom da un sens riguros afirmației: *Dacă valorile argumentului x se apropie de x_0, atunci valorile $f(x)$ ale funcției f se apropie de l.*

Pentru început, să examinăm cîteva

Exemple

1. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{2},$ şi punctul $x_0=2$ (fig. 2.1).

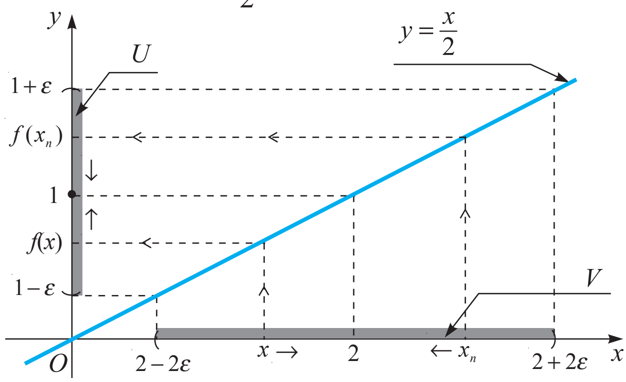


Fig. 2.1

În figura 2.1 observăm că dacă valorile argumentului x se apropie suficient de mult de $x_0=2,$ atunci valorile $f(x)$ ale funcției f se apropie oricît de mult de $l=1.$

Această situație poate fi redată în mai multe moduri.

De exemplu, dacă $(x_n)_{n\geq1}$ este un şir arbitrar şi convergent la $x_0=2,$ atunci şirul $(f(x_n))_{n\geq1},$ unde $f(x_n)=\frac{x_n}{2},$ converge la $l=1$ (fig. 2.1).

Sau în alt mod: pentru orice vecinătate $U=(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon),\ \varepsilon>0,$ centrată în punctul $l=1$ al axei $Oy,$ există o vecinătate $V=(2-2\varepsilon,\ 2+2\varepsilon),\ \varepsilon>0,$ cu centrul în punctul $x_0=2$ al axei Ox, astfel încît pentru orice $x\in V$ rezultă că $f(x)\in U$ (fig. 2.1).

2. Considerăm funcția $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-1}{x-1},$ care nu este definită în punctul 1. Pentru orice şir $(x_n)_{n\geq1},$ $x_n\neq1,$ cu $x_n\to1$ cînd $n\to\infty,$ obținem că

$$f(x_n)=\frac{x_n^2-1}{x_n-1}=x_n+1\to2 \text{ cînd } n\to\infty \text{ (fig. 2.2).}$$

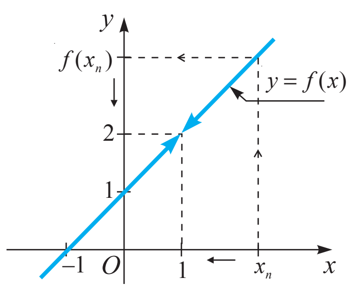


Fig. 2.2

3. Fie funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{dacă } x<1\\ x+1, & \text{dacă } x\geq1,\end{cases}$

şi punctul $x_0=1$ (fig. 2.3). Din reprezentarea grafică a funcției f constatăm: dacă argumentul x ia valori tot mai aproape de $x_0=1,$ dar mai mari decît 1, atunci valorile funcției f se apropie de $l=2;$ dacă însă argumentul x ia valori tot mai aproape de $x_0=1,$ dar mai mici decît 1, atunci valorile funcției f se apropie de $l=0.$ Prin urmare, nu există un număr $l\in\mathbb{R}$ de care valorile funcției f se apropie atunci cînd valorile argumentului x sînt aproape de $x_0=1.$

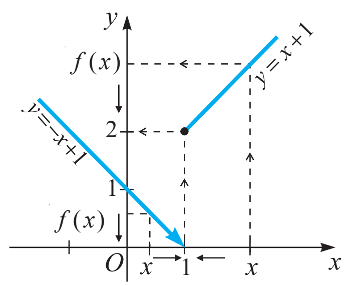


Fig. 2.3

Aşadar, în cazul exemplului **1** (exemplului **2**) se spune că numărul $l=1$ (respectiv numărul $l=2$) este limita funcției f în punctul $x_0=2$ (respectiv în punctul $x_0=1$), iar în cazul exemplului **3** se spune că funcția f nu are limită în punctul $x_0=1$.

Situațiile examinate în aceste exemple conduc la următoarele trei definiții ale limitei unei funcții într-un punct.

Fie $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ o funcție şi $x_0\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E.

Definiție (în limbajul vecinătăților). Se spune că **funcția f are limita $l\in\mathbb{R}$ în punctul x_0** dacă pentru orice vecinătate U a punctului l există o vecinătate V a punctului x_0, astfel încît oricare ar fi $x\in V\bigcap(E\setminus\{x_0\})$ rezultă că $f(x)\in U$.

Limita funcției f în punctul x_0 se notează $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ sau $f(x)\to l$ cînd $x\to x_0$ şi se citeşte: *Limita funcției f cînd x tinde la x_0 este egală cu l* sau *$f(x)$ tinde la l cînd x tinde la x_0*.

În definiția limitei unei funcții într-un punct, vecinătățile punctului l pot fi considerate de forma $U=\{y\in\mathbb{R}\,\big|\,|y-l|<\varepsilon\}=(l-\varepsilon,\, l+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, iar vecinătățile punctului x_0 – de forma $V=\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$, $\delta>0$, şi este evident că, în caz general, V depinde de U. Deci, δ depinde de ε, adică $\delta=\delta(\varepsilon)$. Prin urmare, definiția limitei unei funcții într-un punct poate fi formulată, în mod echivalent, cu ajutorul inegalităților numerice.


Augustin Louis Cauchy

Definiție (Cauchy[1], sau în limbajul $\varepsilon-\delta$). Se spune că **funcția f are limita $l\in\mathbb{R}$ în punctul x_0** dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, astfel încît oricare ar fi $x\in E\setminus\{x_0\}$, inegalitatea $|x-x_0|<\delta$ implică $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Limita unei funcții într-un punct poate fi definită şi cu ajutorul limitelor de şiruri numerice.


Heinrich Eduard Heine

Definiție (Heine[2], sau în limbajul şirurilor). Se spune că **funcția f are limita $l\in\mathbb{R}$ în punctul x_0** dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\ge1}$ din mulțimea $E\setminus\{x_0\}$, ce are limita x_0, şirul respectiv $(f(x_n))_{n\ge1}$ al valorilor funcției f are limita l.

Noțiunea de limită $l=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ a unei funcții f într-un punct x_0 se extinde şi pentru cazul în care una sau ambele valori x_0, l nu sînt finite. Prezentăm unele dintre aceste definiții.

[1] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – matematician francez.
[2] Heinrich Eduard Heine (1821–1881) – matematician german.

Definiții (Cauchy)

1. Se spune că limita funcției f în punctul x_0 este $+\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$, inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $f(x) > \varepsilon$. Se notează: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Cu ajutorul cuantificatorilor $\exists$, $\forall$, definiția 1 se scrie concis astfel:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $(x_0 \in \mathbb{R})$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. î. (astfel încît) $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

2. Se spune că limita funcției f în punctul x_0 este ∞ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$, inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $|f(x)| > \varepsilon$. Se notează: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Concis, definiția 2 se scrie astfel: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $(x_0 \in \mathbb{R})$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. î. $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ $(l \in \mathbb{R})$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. î. $\forall x \in E$, $x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. î. $\forall x \in E$, $|x| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a. î. $\forall x \in E$, $x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

Observații. **1.** Pentru $x_0, l \in \mathbb{R}$, definițiile limitei unei funcții într-un punct (în limbajele vecinătăților și ε–δ) au următoarea interpretare geometrică: *pentru valori ale argumentului x suficient de apropiate de x_0, valorile respective $f(x)$ ale funcției f sînt oricît de mult apropiate de l* (fig. 2.4).

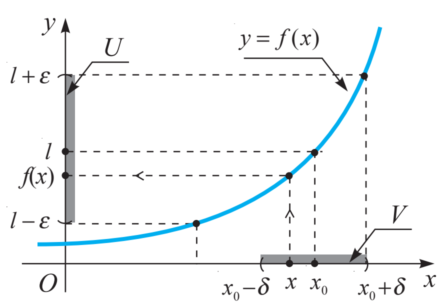


Fig. 2.4

2. Pentru funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, definițiile 3 și 5 (Cauchy) ale limitei unei funcții într-un punct reprezintă definiția limitei unui șir numeric cu limită finită sau infinită.

3. Din definiția Heine a limitei unei funcții într-un punct rezultă că dacă există două șiruri $(x'_n)_{n\ge1}$ și $(x''_n)_{n\ge1}$ din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = x_0$, astfel încît șirurile respective $(f(x'_n))_{n\ge1}$ și $(f(x''_n))_{n\ge1}$ au limite diferite sau nu au limită, atunci funcția f nu are limită în punctul x_0.

Observația **3** este deseori aplicată pentru a demonstra că o funcție f nu are limită în x_0.

4. Se poate demonstra că *dacă există limita unei funcții într-un punct, atunci această limită este unică*.

Fiecare dintre exercițiile următoare a fost rezolvat cu ajutorul definiției limitei unei funcții într-un punct, adecvate enunțului respectiv.

Exerciții rezolvate

1. Să se arate, aplicînd definiția în limbajul vecinătăților a limitei unei funcții într-un punct, că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 3x, \text{ dacă } x<1 \\ 0, \text{ dacă } x=1 \\ 2x+1, \text{ dacă } x>1, \end{cases}$ are limită în punctul $x_0=1$ și $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

Rezolvare:

Fie $U=(3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, o vecinătate arbitrară a punctului $l=3$.

Dacă $x<1$, atunci

$$f(x)=3x\in U \Leftrightarrow 3-\varepsilon<3x<3+\varepsilon \Leftrightarrow 1-\frac{\varepsilon}{3}<x<1+\frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow x\in\left(1-\frac{\varepsilon}{3}, 1\right).$$

Dacă însă $x>1$, atunci

$$f(x)=2x+1\in U \Leftrightarrow 3-\varepsilon<2x+1<3+\varepsilon \Leftrightarrow 1-\frac{\varepsilon}{2}<x<1+\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x\in\left(1, 1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Fie $V=\left(1-\frac{\varepsilon}{3}, 1+\frac{\varepsilon}{3}\right)$ vecinătatea punctului $x_0=1$, $V\subset\left(1-\frac{\varepsilon}{3}, 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Din $x\in V$, $x\neq 1$, rezultă că $x\in\left(1-\frac{\varepsilon}{3}, 1\right)$ sau $x\in\left(1, 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, de unde obținem că $f(x)\in U$.

Așadar, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

2. Se consideră funcția $f: [-1, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-4x+1$. Folosind definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$.

Rezolvare:

$\forall\varepsilon>0$ și $\forall x\in[-1, 3]$ avem $|x|\le 3$ și $|f(x)-5|=|3x^2-4x-4| = |(x-2)(3x+2)|\le$ $\le|x-2|(3|x|+2)\le 11|x-2|<\varepsilon$, dacă $|x-2|<\frac{\varepsilon}{11}$. Așadar, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ $\left(\delta=\frac{\varepsilon}{11}\right)$, astfel încît $\forall x\in[-1, 3]\setminus\{2\}$ cu $|x-2|<\delta$, avem $|f(x)-5|<\varepsilon$.

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}$. Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$.

Rezolvare:

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Considerînd orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, obținem $|f(x)|>\varepsilon \Leftrightarrow |x+1|^3<\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x+1|<\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Deci, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ $\left(\delta=\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right)$, astfel încît $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ cu $|x+1|<\delta$, avem $|f(x)|>\varepsilon$ și, în baza definiției Cauchy, rezultă că $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$.

4. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^2+5x+2}{x+2}$. Să se arate că $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=-3$.

Rezolvare:

Pentru orice şir $(x_n)_{n\geq1}$ din $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-2$, şirul respectiv $(f(x_n))_{n\geq1}$ al valorilor funcției f are limita $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x_n^2+5x_n+2}{x_n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2x_n+1)(x_n+2)}{x_n+2}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+1)=1+2\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-3$. În baza definiției Heine, rezultă că $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=-3$.

5. Fie funcțiile $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$, şi $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sin x$. Să se arate, folosind observația 3, că nu există limitele $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

Rezolvare:

Funcția f nu are limită în punctul $x_0=0$, deoarece există cel puțin două şiruri $(x'_n)_{n\geq1}$, $x'_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, şi $(x''_n)_{n\geq1}$, $x''_n=\dfrac{1}{\pi+2n\pi}$, care au limita zero cînd $n\to\infty$, însă şirurile respective $(f(x'_n))_{n\geq1}$, $f(x'_n)=1$, şi $(f(x''_n))_{n\geq1}$, $f(x''_n)=-1$, au limite diferite: 1 şi respectiv -1.
Similar, funcția g nu are limită la plus infinit, fiindcă şirurile $(x'_n)_{n\geq1}$, $x'_n=n\pi$, şi $(x''_n)_{n\geq1}$, $x''_n=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$, au limita plus infinit (a se consulta observația 2), dar $\lim\limits_{n\to\infty}g(x'_n)=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}g(x''_n)=1$.

1.3. Limite laterale

Fie funcția $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ şi $x_0\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E. Să admitem că x_0 este punct de acumulare şi pentru mulțimea $E_-=E\cap(-\infty,\ x_0)$ sau pentru mulțimea $E_+=E\cap(x_0,\ +\infty)$. În acest caz se spune că ***x_0 este punct de acumulare la stînga*** sau ***punct de acumulare la dreapta pentru mulțimea E***.

Fie $x_0\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare la stînga (la dreapta) pentru mulțimea E. Dacă valorile lui x se apropie de x_0 din stînga (respectiv din dreapta) cu valori $x<x_0$ (respectiv $x>x_0$), se scrie $x\to x_0-0$ (respectiv $x\to x_0+0$). Pentru $x_0=0$, în aceste cazuri se scrie $x\to-0$ (respectiv $x\to+0$).

Pentru funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{dacă } x<1\\ x+1, & \text{dacă } x\geq1,\end{cases}$ considerată în secvența 1.2, am observat că nu există un număr $l\in\mathbb{R}$ de care valorile $f(x)$ să se apropie în timp ce valorile argumentului x sînt suficient de aproape de 1. Dacă însă valorile argumentului x se apropie de 1 din stînga (prin valori $x<1$), atunci valorile $f(x)=-x+1$ se apropie de 0, iar dacă valorile argumentului x se apropie de 1 din dreapta (prin valori $x>1$), atunci valorile $f(x)=x+1$ se apropie de 2. Deci, funcția f nu are limită în punctul 1, însă se spune că ea are limite laterale în acest punct.

În definițiile care urmează, $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ este o funcție, iar $x_0\in\mathbb{R}$ – un punct de acumulare la stînga (la dreapta) pentru mulțimea E.

Definiție. Se spune că numărul $l_s = l_s(x_0) \in \mathbb{R}$ este **limita la stînga a funcției *f* în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$** dacă pentru orice vecinătate U a lui l_s există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi $x \in V \cap E_-$ rezultă că $f(x) \in U$.

Definiție. Se spune că numărul $l_d = l_d(x_0) \in \mathbb{R}$ este **limita la dreapta a funcției *f* în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$** dacă pentru orice vecinătate U a lui l_d există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi $x \in V \cap E_+$ rezultă că $f(x) \in U$.

Numerele $l_s(x_0)$ și $l_d(x_0)$ se numesc ***limite laterale ale funcției f în punctul x_0*** și se folosesc notațiile

$$l_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x), \quad l_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

sau

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

(fig. 2.5).

Pentru $x_0 = 0$, în aceste cazuri se scrie:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = f(-0), \quad \lim_{x \to +0} f(x) = f(+0).$$

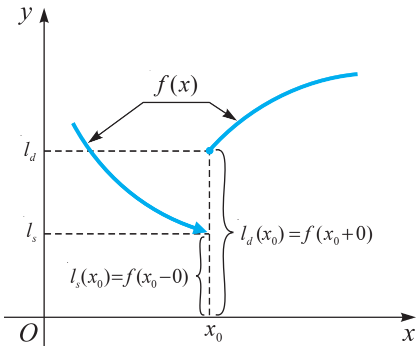


Fig. 2.5

Menționăm că definițiile limitelor laterale pot fi formulate și în limbajele Heine sau Cauchy. Vom prezenta doar enunțul uneia dintre aceste definiții, celelalte fiind propuse ca exerciții.

Definiție (Cauchy). Se spune că numărul $l_d \in \mathbb{R}$ este **limita la dreapta a funcției *f* în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$, inegalitatea dublă $x_0 < x < x_0 + \delta$ implică $|f(x) - l_d| < \varepsilon$.

Observație. Ca și în cazul limitelor de funcții, limitele laterale l_s și l_d pot fi infinite ($+\infty$, $-\infty$ sau ∞). Definițiile acestor concepte pot fi formulate în cele trei limbaje echivalente. Prezentăm doar una dintre aceste definiții.

Definiție (Cauchy). Se spune că $-\infty$ este **limita la dreapta a funcției *f* în punctul x_0** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$, inegalitatea dublă $x_0 < x < x_0 + \delta$ implică $f(x) < -\varepsilon$.

Se notează: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$.

Un criteriu util de existență a limitei unei funcții într-un punct este formulat în

Teorema 2 (criteriul în limbajul limitelor laterale). Fie funcția $f: E \to \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimile E_- și E_+. Funcția f are limită în punctul x_0 dacă și numai dacă funcția f are în x_0 limite laterale egale: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. În acest caz, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Demonstrație

Necesitatea. Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l,$ atunci, în baza definiției, există şi limitele laterale $f(x_0-0)=l$ şi $f(x_0+0)=l.$

Suficiența. Să presupunem că există limitele laterale $f(x_0-0),$ $f(x_0+0)$ şi $f(x_0-0)=f(x_0+0)=l,$ $l\in\mathbb{R}.$ Din definiția Cauchy a limitelor laterale ale unei funcții într-un punct rezultă: $(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=l$ şi $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=l)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0,$ $\exists\,\delta_1>0,$ $\exists\,\delta_2>0,$ astfel încît $\forall x\in E\setminus\{x_0\},$ dacă $x_0-\delta_1<x<x_0$ sau $x_0<x<x_0+\delta_2\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon).$

Fie $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0.$ Evident, $\forall x\in E\setminus\{x_0\}$ cu $|x-x_0|<\delta\Rightarrow(x_0-\delta_1<x<x_0$ sau $x_0<x<x_0+\delta_2)\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon.$ Prin urmare, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l.$

Similar se demonstrează şi cazul în care limita l este infinită. ►

Exerciții rezolvate

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ $f(x)=\begin{cases}x^2+x, \text{ dacă } x\le 2\\ 2x+3, \text{ dacă } x>2.\end{cases}$ Să se determine limitele laterale ale funcției f în punctul $x_0=2.$ Are limită funcția f în punctul $x_0=2$?

Rezolvare:

Dacă $x<2,$ atunci $f(x)=x^2+x,$ şi pentru orice şir de numere $(x_n)_{n\ge1},$ $x_n\in(-\infty,\ 2),$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2+x_n)=6.$

Dacă $x>2,$ atunci $f(x)=2x+3,$ şi pentru orice şir de numere $(t_n)_{n\ge1},$ $t_n\in(2,+\infty),$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=2$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(2t_n+3)=7.$

Conform definiției Heine, limitele laterale sînt $f(2-0)=6,$ $f(2+0)=7$ şi, cum $f(2-0)\ne f(2+0),$ în baza teoremei 2, funcția f nu are limită în punctul $x_0=2.$

2. Să se determine valorile parametrului real a pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ $f(x)=\begin{cases}x^2+a^2, \text{ dacă } x\in[-1,\ 1]\\ 3ax+1, \text{ dacă } x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty),\end{cases}$ are limită cel puțin în unul dintre punctele -1 şi 1. Care este valoarea acestei limite?

Rezolvare:

Pentru orice $x_n\in(-1,\ 1)$ avem $f(x_n)=x_n^2+a^2$ şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1,$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1+a^2,$ iar dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1,$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1+a^2.$ Deci, $l_s(1)=l_d(-1)=1+a^2.$ În mod similar, pentru orice $x_n\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$ obținem că $f(x_n)=3ax_n+1$ şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1,$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1-3a,$ iar dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1,$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1+3a.$ Prin urmare, $l_s(-1)=1-3a,$ $l_d(1)=1+3a.$

Astfel, funcția f are limită în punctul $x_0=-1$ dacă: $l_s(-1)=l_d(-1)\Leftrightarrow 1+a^2=1-3a\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\in\{-3,\ 0\}$. Dacă $a=0$, atunci $l_s(-1)=l_d(-1)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$, iar dacă $a=-3$, atunci $l_s(-1)=l_d(-1)=10\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=10$.

Similar, funcția f are limită în punctul $x_0=1$ dacă: $l_s(1)=l_d(1)\Leftrightarrow 1+a^2=1+3a\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\in\{0,\ 3\}$. Pentru $a=0$ avem $l_s(1)=l_d(1)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, iar pentru $a=3$ obținem că $l_s(1)=l_d(1)=10\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=10$.

Aşadar, pentru $a=0$ funcția f are limită în ambele puncte, -1 şi 1, iar pentru $a\in\{-3,\ 3\}$ ea are limită numai în unul dintre aceste puncte.

Exerciții propuse

B

1. Să se arate că punctul $x_0=2$ este punct de acumulare pentru mulțimea $E\subseteq\mathbb{R}$:

a) $E=\left\{\dfrac{2n}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$; b) $E=\left\{2+\dfrac{(-1)^n}{2^n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$; c) $E=\left\{\dfrac{4n+3}{2n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

2. Să se determine punctele de acumulare pentru mulțimea:

a) $E=\left\{(-1)^n\cdot\dfrac{2n+3}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$; b) $E=\left\{\dfrac{n}{n+3}(3+(-1)^n)\mid n\in\mathbb{N}\right\}$; c) $E=\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{3}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$.

3. Să se indice cel puțin un şir numeric din E care are ca limită punctul de acumulare x_0 pentru mulțimea E:

a) $E=\mathbb{R}\setminus[0,\ 4),\ x_0=4$; b) $E=\left\{\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+2}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\},\ x_0\in\{-1,\ 1\}$.

4. Aplicînd definiția în limbajul vecinătăților a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)=-2$; c) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1}(1-2x)=3$; e) $\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1$; f) $\lim\limits_{x\to -1}x^2=1$.

5. Folosind definiția Heine a limitei unei funcții într-un punct, să se calculeze limita:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x+5}{x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2+5x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-4x-5}$.

6. Să se demonstreze, folosind definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, că:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-5x+3)=1$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+7}{x+3}=1$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$.

7. Să se arate că nu există limita:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\cos\dfrac{1}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to \infty}\sin^2\pi x$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}$.

8. Să se calculeze în punctul specificat x_0 limitele laterale ale funcției $f\colon D$[1] $\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\le 2\\ x^2+x, & \text{dacă } x>2,\end{cases}$ $x_0=2$; b) $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2-1},\ x_0\in\{-1,\ 1\}$.

[1] Aici şi în continuare mulțimea D se consideră domeniul maxim de definiție al funcției.

9. Să se decidă dacă funcţia f are limită în punctul specificat x_0 şi să se calculeze $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ştiind că $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{dacă } x \le 1 \\ x^3 - 2x, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$ $x_0 \in \{0, 1\}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2-x}$, $x_0 \in \{0, 2\}$.

10. Să se cerceteze, în punctele specificate x_k, $k \in \mathbb{Z}$, existenţa limitei funcţiei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$, $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $f(x) = [x]$, $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

11. Fie funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x - [x]$;

b) $f(x) = [\cos x]$;

c) $f(x) = \sigma(\sin x)$, unde $\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \ge 0, \end{cases}$ este funcţia Heaviside (treapta unitate).

Să se schiţeze graficul funcţiei f şi să se determine punctele $x_0 \in \mathbb{R}$ în care există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

12. Fie funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} (ax+1)^2, & \text{dacă } x \le 1 \\ ax+3, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$; b) $f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & \text{dacă } x < 2 \\ x - a, & \text{dacă } x \ge 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$.

Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încît să existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi să se calculeze această limită.

13. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a^2x - x^2, & \text{dacă } x < -2 \\ -6, & \text{dacă } x = -2 \\ 3ax, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$

Pentru care valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$ există $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$?

§2 Operaţii cu limite de funcţii. Limitele unor funcţii elementare

2.1. Operaţii cu limite de funcţii

Să determinăm operaţiile ce pot fi efectuate cu limite de funcţii. Vom prezenta demonstraţiile doar pentru unele dintre aceste operaţii, celelalte demonstraţii fiind propuse ca exerciţii.

Fie E o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$, x_0 un punct de acumulare finit sau infinit pentru mulţimea E şi $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ funcţii pentru care există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, unde limitele a şi b sînt finite. Sînt adevărate ***propoziţiile***:

① Dacă funcţia f are limită în punctul x_0 şi $c \in \mathbb{R}$, atunci şi funcţia $c \cdot f$ are limită în punctul x_0 şi $\lim\limits_{x \to x_0} [cf(x)] = c\,a = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Prin urmare, *factorul constant poate fi extras de sub semnul limitei*.

Observaţie. Dacă în propoziţia ① se consideră că $f(x) = 1$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$. Deci, limita în orice punct x_0 a unei constante este însăşi constanta.

② Dacă funcțiile f, g au limită în punctul x_0, atunci și funcția $f \pm g$ are limită în punctul x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = a \pm b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ – *limita sumei (diferenței) de funcții este egală cu suma (diferența) limitelor acestor funcții.*

Demonstrație

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir arbitrar din mulțimea $E\setminus\{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Deoarece funcțiile f și g au limită în punctul x_0, în baza definiției Heine, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ și $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$.

Aplicînd proprietățile operațiilor cu șiruri numerice convergente, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)\pm g(x_n)] = a\pm b$.

Prin urmare, conform definiției Heine, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = a \pm b$. ►

③ Dacă funcțiile f, g au limită în punctul x_0, atunci și funcția $f\cdot g$ are limită în punctul x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = a\cdot b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ – *limita produsului de funcții este egală cu produsul limitelor acestor funcții.*

Propozițiile ② și ③ sînt adevărate și pentru un număr finit $f_1, f_2, ..., f_n$ de funcții care au limită în punctul x_0. În particular, din propoziția ③, pentru $f_1 = f_2 = ... = f_n = f$, se obține $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n$, $n\in \mathbb{N}$, $n\geq 1$.

④ Dacă funcțiile f și g au limită în punctul x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \neq 0$, atunci cîtul $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ este definit pe o vecinătate a punctului x_0 din mulțimea $E\setminus\{x_0\}$, funcția $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ – *limita cîtului a două funcții este egală cu cîtul limitelor acestor funcții.*

⑤ Dacă funcțiile f și g au limită în punctul x_0 și $f(x) > 0$ pentru orice $x\in E$, atunci și funcția $f^g\colon E\to\mathbb{R}$, $(f^g)(x) = [f(x)]^{g(x)}$ are limită în punctul x_0 (cu excepția cazului 0^0) și

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = a^b = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Condițiile de existență a limitei pentru funcții compuse sînt formulate în propoziția ⑥.

⑥ Fie E și F submulțimi nevide din $\mathbb{R}$, x_0 un punct de acumulare pentru E, funcțiile $u\colon E\to F$, $f\colon F\to\mathbb{R}$ și funcția compusă $f\circ u\colon E\to\mathbb{R}$, $(f\circ u)(x) = f(u(x))$, $\forall x\in E$.

Dacă 1) $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$,

2) $u(x)\neq u_0$ pentru orice x dintr-o vecinătate din E a lui x_0 și $x\neq x_0$,

3) $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = l$,

atunci funcția compusă $f\circ u$ are limită în punctul x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = l$.

Observații.* 1.** Egalitatea $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$, stabilită în propoziția ⑥, argumentează un procedeu general numit ***metoda substituției sau ***metoda schimbării de variabilă*** la calculul limitelor de funcții. Într-adevăr, membrul din dreapta al egalității se obține din membrul din stînga dacă se efectuează notația $u = u(x)$, numită ***substituție*** sau ***schimbare de variabilă***, și se ține cont de ipotezele 1) și 2) ale propoziției ⑥ că $u \to u_0$ și $u \neq u_0$.

2. Operațiile cu limite de funcții sînt valabile și pentru limite laterale.

Propozițiile ①–⑤ sînt adevărate și în unele cazuri în care una sau ambele funcții f și g au limită infinită în punctul x_0 sau cînd pentru cîtul $\frac{f}{g}$ avem $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0.$

De exemplu, să presupunem că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a,\ a\in \mathbb{R},$ iar $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ și să demonstrăm că în acest caz funcția $f+g$ are limită în punctul x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = +\infty.$

Conform definiției Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, avem:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in E \setminus \{x_0\},$$
$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon; \tag{1}$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists \delta_2(M) > 0,\ \forall x \in E \setminus \{x_0\},$$
$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > M - (a - \varepsilon). \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că pentru orice $M > 0,\ \exists \delta = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(M)) > 0,$ astfel încît oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$ inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $|x - x_0| < \delta_1$ și $|x - x_0| < \delta_2$, care, la rîndul lor, implică

$$f(x) + g(x) > (a - \varepsilon) + M - (a - \varepsilon) = M.$$

În baza definiției Cauchy a limitei funcției în punct, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = +\infty.$

Simbolic, acest rezultat se notează $a + (+\infty) = +\infty$ și se numește ***formă neexceptată***, ***formă determinată*** sau, simplu, ***determinare***.

În mod similar pot fi demonstrate și formele neexceptate:

$$a + (-\infty) = -\infty; \quad a + \infty = \infty; \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty; \quad a\cdot(+\infty) = +\infty \ (a > 0);$$
$$a\cdot(-\infty) = +\infty \ (a < 0); \quad \frac{a}{0} = \infty \ (a \neq 0) \ \text{etc.}$$

În cazul în care $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty,$ despre existența limitei funcției $f+g$ sau a funcției $\frac{f}{g}$ în punctul x_0 nu ne putem pronunța.

Simbolic, acest rezultat se notează $\infty - \infty$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ și se numește ***formă exceptată***, ***formă nedeterminată*** sau, simplu, ***nedeterminare*** (o expunere mai detaliată a acestor cazuri se va efectua în §4).

Așadar, operațiile cu limite de funcții pot avea, sau nu avea sens. Aceste operații conduc le apariția așa-numitelor ***forme neexceptate*** (***determinări***) și ***forme exceptate*** (***nedeterminări***).

Tabelul formelor neexceptate

Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci:

1. $\infty + a = \infty$
2. $(+\infty) + a = +\infty$
3. $(-\infty) + a = -\infty$
4. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
5. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
6. $a \cdot \infty = \infty \ (a \neq 0)$
7. $a \cdot (+\infty) = +\infty \ (a > 0)$
8. $a \cdot (-\infty) = -\infty \ (a > 0)$
9. $a \cdot (+\infty) = -\infty \ (a < 0)$
10. $a \cdot (-\infty) = +\infty \ (a < 0)$
11. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
12. $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
13. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
14. $\infty \cdot \infty = \infty$
15. $\frac{a}{\infty} = 0$
16. $\frac{\infty}{a} = \infty$
17. $\frac{a}{0} = \infty \ (a \neq 0)$
18. $a^{+\infty} = +\infty \ (a > 1)$
19. $a^{-\infty} = 0 \ (a > 1)$
20. $a^{+\infty} = 0 \ (0 < a < 1)$
21. $a^{-\infty} = +\infty \ (0 < a < 1)$
22. $(+\infty)^a = +\infty \ (a > 0)$
23. $(+\infty)^a = 0 \ (a < 0)$
24. $0^{+\infty} = 0$
25. $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
26. $(+\infty)^{-\infty} = 0.$

Tabelul formelor exceptate

1. $\frac{\infty}{\infty}$	**2.** $\frac{0}{0}$	**3.** $0 \cdot \infty$	**4.** $\infty - \infty$	**5.** 1^{∞}	**6.** 0^0	**7.** ∞^0

Exemple

Din definiția limitei unei funcții într-un punct rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, unde $x_0 \in \mathbb{R}$.
Prin urmare, în baza propozițiilor ① – ⑥ obținem:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 4x - 2) = 3(\lim\limits_{x\to 2} x)^2 - 4\lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 2 = 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 - 2 = 2;$

2. $\lim\limits_{x\to 2}[(x+3)\cdot(3x^2 - 4x - 2)] = \lim\limits_{x\to 2}(x+3)\cdot\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 4x - 2) = 5\cdot 2 = 10;$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2 - 4x - 2}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 4x - 2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)} = \frac{2}{5};$

4. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 4x - 2)^{(x+3)} = [\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 4x - 2)]^{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)} = 2^5 = 32;$

5. $\lim\limits_{x\to -1}[3(x+3)^2 - 4(x+3) - 2] = \lim\limits_{u\to 2}(3u^2 - 4u - 2) = 2 \quad (u = x+3 \to 2 \text{ cînd } x \to -1).$

2.2. Limitele funcţiilor elementare

În cele ce urmează vom studia limitele unor funcţii elementare, funcţii care se folosesc la descrierea în limbaj matematic a diverselor procese din natură. Vom prezenta, fără demonstraţie, relaţiile de calcul al limitelor de funcţii respective. Aceste rezultate pot fi deduse direct utilizînd definiţia Heine sau Cauchy a limitei unei funcţii într-un punct.

I. Funcţia putere cu exponent natural $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$ (fig. 2.6)

a) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n,\quad x_0\in\mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty.$

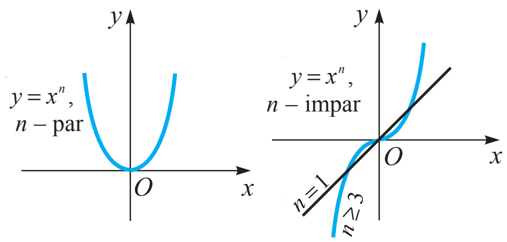


Fig. 2.6

II. Funcţia putere cu exponent întreg negativ

$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$ (fig. 2.7)

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x^n}=\dfrac{1}{x_0^n},\quad x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^n}=\begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$;

e) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x^n}=\begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$

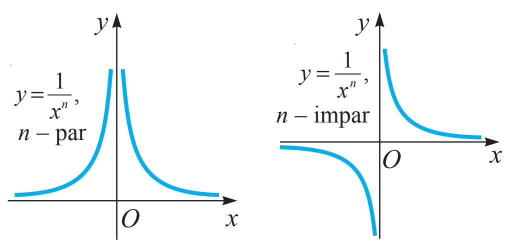


Fig. 2.7

III. Funcţia polinomială

$P\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,\ a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,n},\ a_0\neq 0,\ n\in\mathbb{N}^*.$

a) $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0),\quad x_0\in\mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to\infty} a_0x^n$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} a_0x^n$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} a_0x^n$.

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to-1}(3x^3-4x+2)=3\cdot(-1)^3-4\cdot(-1)+2=3.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^2+5x-2)=\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^2)=-\infty.$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+100x^4-3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5)=+\infty.$

IV. Funcția rațională

Fie P şi Q două funcții polinomiale cu coeficienți reali definite, respectiv, prin:

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ şi $Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, $m, n\in\mathbb{N}^*$.

Funcția $\dfrac{P}{Q}: E\to\mathbb{R}$, unde $E=\{x\in\mathbb{R}\,|\,Q(x)\neq 0\}$, se numeşte ***funcție rațională***.

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, $\forall x_0\in E$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n}{b_0x^m}=\begin{cases}\infty, \text{ dacă } n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ dacă } n=m\\ 0, \text{ dacă } n<m.\end{cases}$

Dacă $x\to+\infty$ sau $x\to-\infty$, atunci în b) se mai specifică şi semnul expresiei $\dfrac{a_0}{b_0}\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-m}$. Cazul $Q(x_0)=0$ se va examina în § 4.

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-4x^2+3}{-x^2+6x-2}=\dfrac{2\cdot 2^3-4\cdot 2^2+3}{-2^2+6\cdot 2-2}=\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5+3x+1}{4x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5}{4x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x^3\right)=+\infty$.

V. Funcția radical

1 $f: [0, +\infty)\to[0, +\infty)$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, n – par (fig. 2.8)

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$, $x_0\in[0, +\infty)$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$, n – par.

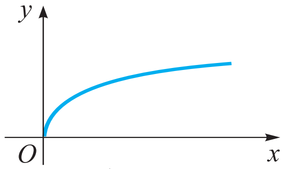


Fig. 2.8

2 $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, n – impar (fig. 2.9)

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$, $x_0\in\mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=\infty$, n – impar;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$, n – impar;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty$, n – impar.

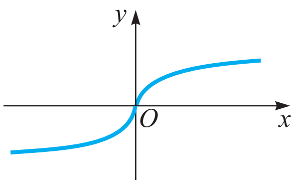


Fig. 2.9

VI. Funcția exponențială

$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty), \ f(x) = a^x, \ a > 0, \ a \neq 1$ (fig. 2.10)

a) $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \ x_0 \in \mathbb{R}$;

b) dacă $a > 1$, atunci: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$;

c) dacă $0 < a < 1$, atunci: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0, \ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$;

d) nu există $\lim\limits_{x \to \infty} a^x$.

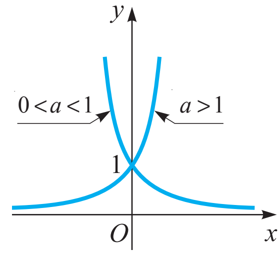


Fig. 2.10

VII. Funcția logaritmică

$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \log_a x, \ a > 0, \ a \neq 1$ (fig. 2.11)

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0, \ x_0 > 0$;

b) dacă $a > 1$, atunci: $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = -\infty, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$;

c) dacă $0 < a < 1$, atunci: $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

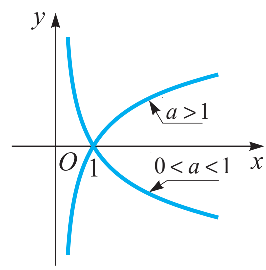


Fig. 2.11

VIII. Funcția putere cu exponent real

$f: (0, +\infty) \to (0, +\infty), \ f(x) = x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (fig. 2.12)

a) $\lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha, \ x_0 > 0$;

b) $\alpha > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +0} x^\alpha = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$;

c) $\alpha < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0, \ \lim\limits_{x \to +0} x^\alpha = +\infty$.

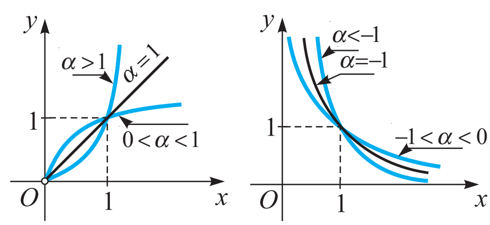


Fig. 2.12

IX. Funcții trigonometrice

❶ ***Funcția sinus*** $f: \mathbb{R} \to [-1, 1], \ f(x) = \sin x$ (fig. 2.13)

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0, \ x_0 \in \mathbb{R}$;

b) nu există: $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x, \ \lim\limits_{x \to -\infty} \sin x$.

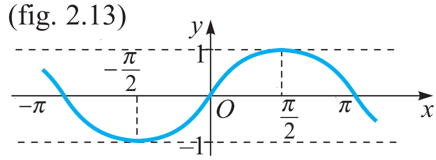


Fig. 2.13

❷ ***Funcția cosinus*** $f: \mathbb{R} \to [-1, 1], \ f(x) = \cos x$ (fig. 2.14)

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0, \ x_0 \in \mathbb{R}$;

b) nu există: $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \cos x, \ \lim\limits_{x \to -\infty} \cos x$.

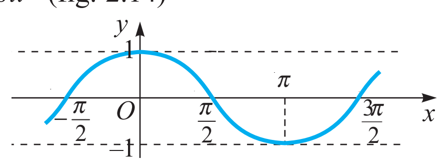


Fig. 2.14

❸ *Funcția tangentă*

$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{tg} x$ (fig. 2.15)

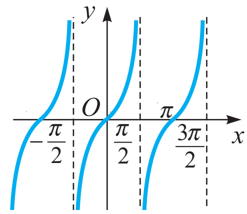


Fig. 2.15

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad x_0 \neq \alpha_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

b) $\lim\limits_{x \to \alpha_k - 0} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to \alpha_k + 0} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad k \in \mathbb{Z}.$

❹ *Funcția cotangentă*

$f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{ctg} x$ (fig. 2.16)

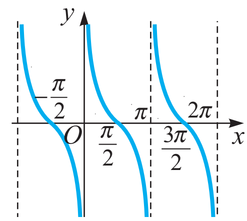


Fig. 2.16

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0, \quad x_0 \neq \beta_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

b) $\lim\limits_{x \to \beta_k - 0} \operatorname{ctg} x = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to \beta_k + 0} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}.$

X. Funcții trigonometrice inverse

❶ *Funcția arcsinus*

$f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad f(x) = \arcsin x$ (fig. 2.17)

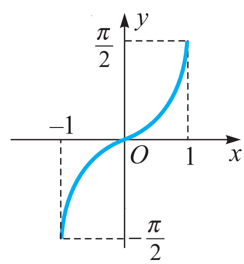


Fig. 2.17

$\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad x_0 \in [-1, 1].$

❷ *Funcția arccosinus*

$f: [-1, 1] \to [0, \pi], \quad f(x) = \arccos x$ (fig. 2.18)

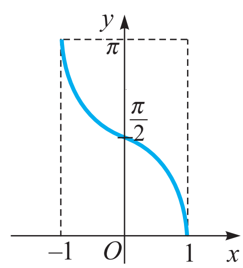


Fig. 2.18

$\lim\limits_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 \in [-1, 1].$

❸ *Funcția arctangentă*

$f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad f(x) = \operatorname{arctg} x$ (fig. 2.19)

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R};$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2};$

c) nu există $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x.$

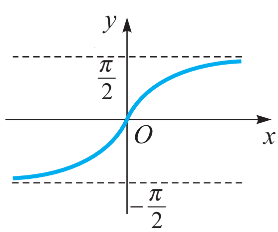


Fig. 2.19

❹ *Funcția arccotangentă*

$f: \mathbb{R} \to (0, \pi), \quad f(x) = \operatorname{arcctg} x$ (fig. 2.20)

a) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R};$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi;$

c) nu există $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x.$

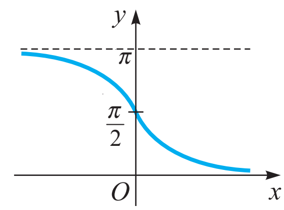


Fig. 2.20

XI. Funcția modul (valoarea absolută)

$f: \mathbb{R} \to [0, +\infty), \quad f(x) = |x|$ (fig. 2.21)

a) $\lim\limits_{x\to x_0} |x| = |x_0|, \quad x_0 \in \mathbb{R};$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} |x| = +\infty.$

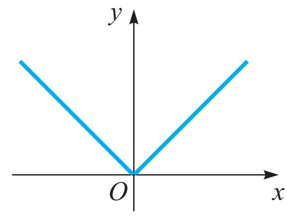


Fig. 2.21

Cea mai simplă clasă de funcții care se studiază în analiza matematică este mulțimea funcțiilor elementare I–XI. Funcțiile care se obțin din acestea prin aplicarea succesivă a unui număr finit de operații aritmetice şi de compunere de asemenea se numesc ***funcții elementare***. Constatăm că pentru funcțiile elementare $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției) este verificată relația $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \; x_0 \in D$, adică *limita funcției într-un punct este egală cu valoarea funcției în acest punct*.

Exemple

1. a) Funcția determinată prin formula $f(x) = \sqrt{x} + 2^x - 3\log_2 x$ este elementară, deci $\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x} + 2^x - 3\log_2 x) = f(4) = \sqrt{4} + 2^4 - 3\log_2 4 = 12.$

b) În mod similar,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\ln(\sin x) + 3\ln\left(\frac{5}{4} + \cos^2 x\right)\right) = \ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) + 3\ln\left(\frac{5}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}\right) = \ln\frac{1}{2} + 3\ln 2 = 2\ln 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3} = \infty; \;\; \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0; \;\; \lim\limits_{x\to+0}\ln x = -\infty; \;\; \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x} = \infty; \;\; \lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{3}} = 0; \;\; \lim\limits_{x\to+0}\operatorname{ctg} x = +\infty$ etc.

Exerciții propuse

B

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\left(-\frac{1}{8}x^3 + \sqrt{x} + 5\right);$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4 + \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2}\right);$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x} - \frac{2}{x^2} + x^3\right);$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x}\right);$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} - 3x^2\right);$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + 3 + x^3 + \sqrt[3]{x}\right).$

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+x-10)$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2x^3+5x^2+3)$; c) $\lim\limits_{x\to \infty}(2x^4+3x^3+1)$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-5x^3+100x^2)$; e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-10x^2+1}{x^2+3x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+x-3}{x^2-5x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-x^3}{2x^4+3}$; h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+4}{1+x-x^2}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-x^2+3x}{5x^4-x^3-x}$.

3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(2^x+\log_{0,25}x-(\sqrt{3})^x)$; b) $\lim\limits_{x\to +0}(\pi^x+\log_3 x)$; c) $\lim\limits_{x\to +0}(\log_{0,5}x-2^x)$;

d) $\lim\limits_{x\to \log_2 e}(2^x-2\cdot 4^x+8^x)$; e) $\lim\limits_{x\to 2^e}(\log_2 x+\log_4 x-e)$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+\lg x)$.

4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-\sqrt[4]{x^4+1})$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^4-x^3+1)(1-x^2)$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^6-x^3)(x^3-x+1)$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{|x-1|}$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+1}{|x+1|}$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x-1|}{3x-1}$.

5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}(\sin x+\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}\operatorname{tg} x)$; b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x+2\operatorname{ctg} x-\cos x)$;

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+n\pi}(\sin x+2\cos x-3\operatorname{ctg} x),\ n\in\mathbb{Z}$; d) $\lim\limits_{x\to n\pi}(2\sin x-3\cos x+\operatorname{tg} x),\ n\in\mathbb{Z}$.

6. Să se completeze spațiile punctate, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sin(2^x)=\lim\limits_{y\to \ldots}\sin y=0$, unde $y=2^x$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}(\pi^x+\ln x)=\lim\limits_{y\to \ldots}\operatorname{tg} y=\ldots$, unde $y=\ldots$

7. Să se afle valoarea de adevăr a propoziției:

a) $\nexists\lim\limits_{x\to +\infty}\cos(1-2x)$; b) $\exists\lim\limits_{x\to -\infty}\sin x^2$; c) $\nexists\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin x-\cos x)$,

unde simbolul $\nexists$ semnifică „nu există”.

8. Să se calculeze în punctul indicat x_0 limitele laterale ale funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$, $x_0\in\{-1, 0, 1\}$; b) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2-1}}$, $x_0\in\{-1, 1\}$; c) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x+1}}}$, $x_0=1$.

9. Pentru care valori ale parametrului $m\in\mathbb{R}$ funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}3\sqrt{x^2+m^2}-2, \text{ dacă } x<0\\ m+2, \text{ dacă } x=0\\ (m^2e^x):\left(1+2^{-\frac{1}{x}}\right), \text{ dacă } x>0,\end{cases}$$

are în punctul $x_0=0$ limita egală cu $f(0)$?

10. Să se determine valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{m^2x^2-6mx+9\cdot 2^{1-x}}, \text{ dacă } x<1\\ 4-\sqrt{m^2x^2+2mx+3^{x-1}}, \text{ dacă } x\geq 1,\end{cases}$$

are limită în punctul $x_0=1$.

11. Aplicînd noțiunea de limită laterală și teorema despre limita funcției compuse, să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \cos(1-2\sin x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\sin^2 x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{3^x-\ln x^2+x^3}$;

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{x}{2}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}^3(\pi\cos x)$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{\sin x}}{\ln(\cos x)}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)$.

§3 Calculul limitelor de funcții

3.1. Proprietăți ale limitelor de funcții

Fie $E\subseteq\mathbb{R}$, funcțiile $f, g\colon E\to\mathbb{R}$ și $x_0\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E. Afirmațiile care urmează exprimă ***proprietăți ale limitelor de funcții*** sau ***condiții suficiente de existență a limitei unei funcții într-un punct*** și pot fi deduse folosind definiția limitei unei funcții într-un punct.

1° Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$, atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0, astfel încît funcția f este mărginită pe mulțimea $V(x_0)\cap E$.

2° Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, $a, b\in\mathbb{R}$, și $a<b$ $(a>b)$, atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0, astfel încît $f(x)<g(x)$ (respectiv $f(x)>g(x)$) pentru orice $x\in V(x_0)\cap E\setminus\{x_0\}$.

Consecință. În condițiile proprietății 2°, dacă $g(x)=\lambda$ $(\forall x\in E,\ \lambda\in\mathbb{R})$, atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0, astfel încît $f(x)<\lambda$ (respectiv $f(x)>\lambda$) pentru orice $x\in V(x_0)\cap E\setminus\{x_0\}$.

În cazul $\lambda=0$ se obține $f(x)<0$ (respectiv $f(x)>0$) pentru orice $x\in V(x_0)\cap E\setminus\{x_0\}$.

3° Trecerea la limită în inegalități. Dacă

a) există limitele $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

b) $f(x)\le g(x)$ pentru orice $x\in E$ sau pe o vecinătate a lui x_0 din E,

atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Consecință. În condițiile proprietății 3°, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, iar dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

4° Criteriul „cleștelui”. Fie funcțiile $f, g, h\colon E\to\mathbb{R}$ verifică condițiile:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$,

b) $f(x)\le h(x)\le g(x)$ pentru orice $x\in E$ sau pe o vecinătate a lui x_0 din E.

Atunci, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sin x)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x^2-e^{-x})$.

Rezolvare:

a) Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ are loc inegalitatea dublă: $-1\le -\sin x\le 1$.

Atunci $x-\sin x\ge x-1$ (1). Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$, din consecința proprietății 3° și din inegalitatea (1) rezultă că $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sin x)=+\infty$.

b) Deoarece $\sin x^2-e^{-x}\le 1-e^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, și $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^{-x})=-\infty$, din consecința proprietății 3° rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x^2-e^{-x})=-\infty$.

3.2. Limite remarcabile

Limitele

$$\boxed{❶\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad ❷\ \text{a) } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ \text{b) } \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

sînt utile la calculul limitelor de funcții și se numesc ***limite remarcabile***.

Lemă. Este adevărată inegalitatea dublă $|\sin x|\le|x|\le|\operatorname{tg} x|$, dacă $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

Demonstrație

Fie $0<x<\frac{\pi}{2}$, un cerc de rază 1 și unghiul la centru *AOC* avînd măsura în radiani egală cu x (fig. 2.22). Notăm cu *B* punctul de intersecție a tangentei la cerc în punctul *A* cu semidreapta *OC*, iar cu *D* – piciorul perpendicularei duse din punctul *C* pe dreapta *OA*. Evident, aria triunghiului *AOC* este mai mică decît aria sectorului *AOC*, care, la rîndul său, este mai mică decît aria triunghiului *AOB*, adică

$$\frac{1}{2}AO\cdot DC\le\frac{1}{2}AO^2\cdot x\le\frac{1}{2}AO\cdot AB. \qquad (2)$$

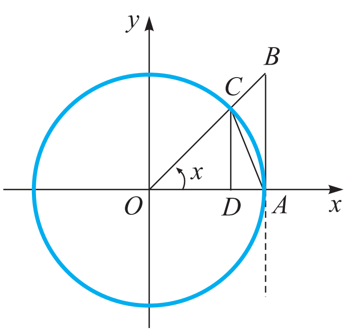


Fig. 2.22

Cum $AO=1$, $DC=\sin x$, $AB=\operatorname{tg} x$, inegalitatea dublă (2) devine

$$\sin x\le x\le\operatorname{tg} x,\ \text{unde}\ 0\le x<\frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Dacă $-\frac{\pi}{2}<x<0$, atunci $0<-x<\frac{\pi}{2}$. Deci, (3) implică $\sin(-x)\le -x\le\operatorname{tg}(-x)$, adică

$$-\sin x\le -x\le -\operatorname{tg} x,\ \text{unde}\ -\frac{\pi}{2}<x<0. \qquad (4)$$

Inegalitățile (3) și (4), în baza definiției valorii absolute, sînt echivalente cu inegalitatea dublă indicată în lemă. ►

Să demonstrăm limitele remarcabile ❶ şi ❷.

1. Dacă $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$, atunci $\sin x\neq 0$ şi, cum $x\neq 0$, din inegalitatea dublă stabilită în lemă, prin împărţire la $|\sin x|$, obţinem: $1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\left|\frac{1}{\cos x}\right|\Leftrightarrow|\cos x|<\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1$.

Însă $|\cos x|=\cos x$, iar x şi $\sin x$ au acelaşi semn pentru $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Prin urmare, $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$, dacă $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$. Cum $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, din ultima inegalitate dublă, conform criteriului „cleştelui”, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

2. Pentru limita remarcabilă ❷ demonstraţia este doar schiţată. a) Folosind relaţia $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ (a se vedea modulul 1, § 3, secvenţa 3.3), se poate demonstra că pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ are loc relaţia $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$.

În acest caz, în baza definiţiei Heine a limitei unei funcţii într-un punct, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Cazul b) rezultă din cazul a) şi din propoziţia ⑥ despre limita funcţiei compuse, dacă se efectuează în a) substituţia $u=\frac{1}{x}$ şi $u\to 0$ cînd $x\to\infty$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$.

Rezolvare:

Vom rezolva aceste exerciţii aplicînd relaţiile respective pentru limite de funcţii elementare, limitele remarcabile ❶, ❷ şi propoziţia ⑥ despre limita funcţiei compuse.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

b) Efectuăm schimbarea de variabilă $u=a^x-1$. Atunci $x=\log_a(1+u)$ şi $u\to 0$ cînd $x\to 0$. Prin urmare, similar cu limita a), obţinem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=$

$=\alpha\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha\ln e\cdot 1=\alpha,$ unde $u=\alpha\ln(1+x)$ şi $u\to 0$ cînd $x\to 0$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\right)^2=\frac{1}{2},$ unde $u=\frac{x}{2}\to 0$ cînd $x\to 0$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^{-1}=1,$ unde $u=\arcsin x$ şi $u\to 0$ cînd $x\to 0$.

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{tg}u}=\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}u}{u}\right)^{-1}=1,$ unde $u=\operatorname{arctg}x$ şi $u\to 0$ cînd $x\to 0$.

Observație. Limitele remarcabile ❶ şi ❷, precum şi toate limitele din exercițiul rezolvat **1**, în baza propoziției ⑥ despre limita funcției compuse, rămîn adevărate şi în cazul în care se va face schimbarea de variabilă $x=u(t)$, unde $\lim\limits_{t\to t_0}u(t)=0$ (cu excepția limitei remarcabile ❷ a), unde $\lim\limits_{t\to t_0}u(t)=\infty$).

2. Să se calculeze limita:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\operatorname{tg}5x}{\sin 4x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 2x}-1}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x^2}-3^{2x^2}}{\cos x-\cos 2x}$.

Rezolvare:

Folosind limita remarcabilă ❶, rezultatele exercițiului rezolvat **1** şi observația de mai sus, obținem:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\operatorname{tg}5x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin 3x}{3x}-5\frac{\operatorname{tg}5x}{5x}}{4\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{3\cdot 1-5\cdot 1}{4\cdot 1}=-\frac{1}{2};$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 2x}-1}{x^2}=12\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{e^{3\sin^2 2x}-1}{3\sin^2 2x}\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\right]=12\ln e\cdot 1^2=12;$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x^2}-3^{2x^2}}{\cos x-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^{3x^2}-1)-(3^{2x^2}-1)}{(1-\cos 2x)-(1-\cos x)}=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{2^{3x^2}-1}{3x^2}-2\cdot\frac{3^{2x^2}-1}{2x^2}}{4\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}-\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{3\ln 2-2\ln 3}{4\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\ln\frac{8}{9}.$$

3. Să se calculeze limita:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{2x^2+x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{5+3x}-2}{x^2+2x-3}$.

Rezolvare:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos 3x-1))}{2x^2+x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+(\cos 3x-1))}{\cos 3x-1}\cdot\frac{\cos 3x-1}{(3x)^2}\cdot\frac{9}{2+x}\right]=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{9}{2+0}=-\frac{9}{4};$$

b) Efectuăm schimbarea de variabilă: $u=x-1$. Atunci $u\to 0$ cînd $x\to 1$ şi

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{5+3x}-2}{x^2+2x-3}=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[3]{5+3(1+u)}-2}{(1+u)^2+2(1+u)-3}=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3u}-2}{u^2+4u}=$$

$$=2\lim_{u\to 0}\left[\frac{\left(1+\frac{3}{8}u\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\frac{3}{8}u}\cdot\frac{\frac{3}{8}}{u+4}\right]=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{3}{8}}{4}=\frac{1}{16}.$$

4. Să se calculeze limita:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Rezolvare:

Vom aplica limitele remarcabile ❷ a) şi ❷ b).

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)^{1-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{1-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{2x+3}(1-x)}=\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x-1)}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\left(1-\frac{1}{x}\right)}{2+\frac{3}{x}}}=e^2,$$

unde $u=\dfrac{2x+3}{-4}$ şi $u\to\infty$ cînd $x\to\infty$;

b) $$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}}=\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=e^{\frac{1}{2}\cdot 1}=\sqrt{e},$$ unde

$u=\sin\dfrac{x}{2}$ şi $u\to 0$ cînd $x\to 0$.

Exerciții propuse

B

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-1)(2x+1)-3}{(x-3)(x+2)+x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+2x)(1+3x)}{(1+x)(1-2x)}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{9x^2+1}{16x^2+1}}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+2x)(1+3x)-1}{10x+x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-x)(1-3x)-1}{(1-5x)(1+7x)-1}$; f) $\lim\limits_{x\to1}\frac{(2+x)^2-9}{(3+x)^2-16}$;

g) $\lim\limits_{x\to4}\frac{(x-2)^3-8}{(x-3)^3-1}$; h) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^3-1-3x}{6x^2+x^4}$; i) $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x^3-8)(x^2-4)}$;

j) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{2x^2-x-6}$; k) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; l) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+1}$;

m) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{1+4x}-3}$; n) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}$; o) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$;

p) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; q) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{\sin 4x}$; r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$;

s) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}$; t) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$; u) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1}$; b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{1+4x}-3}{\sqrt[3]{2+3x}-2}$; c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1+7x}}{1+\sqrt[5]{1-2x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin 2(x-2)}{x-2}$; e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(3x+x^2)}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-2\sin x}{x+3\sin x}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\pi+3x)}{\sin(2\pi-6x)}$; h) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}-3}{\operatorname{tg}x+\sin 2x}$; i) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{e^{5x}-e^{3x}}$;

j) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$; k) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 x}$; l) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{e^{6x^2}-1}$;

m) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{\sin(3x+\sin x)}$; n) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\cos 2x-e^{x^2}}$; o) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin 3x}}{\sin(\sin(\sin x))}$;

p) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 3x}}{\operatorname{tg}x-\sin 4x}$; q) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos 2x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{arctg}x^2}$; r) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\arcsin x)}{\sqrt[5]{1-\sin 2x}-1}$;

s) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(e^{x^2}+\sin^2 x)}$; t) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{e^{\sin x^2}-\cos 2x}$; u) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1-\sin^3 x)}{\cos^4 x}$.

3. Să se aplice proprietățile limitelor de funcții și să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\cos x^2)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin 2x-\cos 3x)$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x-2^x)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\sin x)e^x$.

4. Să se determine $m, n\in\mathbb{R}$, dacă:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}+mx+n\right)=3$; b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(mx+n)}{x-1}=2$, unde $m+n=\pi$.

§4 Cazuri exceptate la operații cu limite de funcții

În § 2 s-a afirmat că anumite operații cu limite de funcții nu au sens. Vom examina mai detaliat doar una dintre aceste operații.

Fie x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: E \to \mathbb{R}$ funcții pentru care există limitele finite sau infinite $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ și $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. De exemplu, din definițiile respective ale limitei unei funcții într-un punct se poate stabili că: dacă $a = \infty$, $b \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \infty$; dacă $a = +\infty$, $b = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = +\infty$ etc. Simbolic, aceste propoziții se scriu astfel: $\infty + b = \infty$ $(b \in \mathbb{R})$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ și se numesc *forme* sau *cazuri neexceptate* (*determinate*) ori, simplu, *determinări*, iar despre suma $a + b$ în acest caz se spune că are sens. Tabelul complet al ***formelor neexceptate***, care apar la operații cu limite de funcții, este prezentat în secvența 2.1.

Dacă însă $a = +\infty$, $b = -\infty$ sau $a = -\infty$, $b = +\infty$, atunci despre limita funcției $f + g$ în punctul x_0 nu se poate afirma nimic concret. Într-adevăr, dacă $x \to +\infty$, atunci:

a) $f(x) = x^2 \to +\infty$, $g(x) = -x \to -\infty$ și $f(x) + g(x) = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \to +\infty$;

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \to +\infty$, $g(x) = -x \to -\infty$ și $f(x) + g(x) = \dfrac{1}{x} \to 0$;

c) $f(x) = x + l \to +\infty$, $g(x) = -x \to -\infty$ și $f(x) + g(x) = l \to l$, $l \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = x + \sin x \to +\infty$, $g(x) = -x \to -\infty$ și $f(x) + g(x) = \sin x$ nu are limită.

Așadar, $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) + g(x))$ depinde de însăși natura funcțiilor *f* și *g* și poate fi infinită, zero, orice număr real sau poate chiar să nu existe. În acest caz se spune că limita respectivă reprezintă o *formă* sau *un caz exceptat* (*nedeterminat*) ori, simplu, *o nedeterminare* de tipul $\infty - \infty$, iar despre suma $a + b$ se spune că este lipsită de sens.

În general, operațiile $a + b$, $a \cdot b$, $\dfrac{a}{b}$ și a^b cu limite de funcții $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ conduc la următoarele șapte forme sau cazuri exceptate:

$$\boxed{\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0 \cdot \infty,\quad \infty - \infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^0,\quad \infty^0}.$$

Nu există o regulă strictă care ar permite eliminarea cazurilor exceptate. Există doar unele recomandări pentru excluderea acestor forme.

I. Cazul exceptat $\dfrac{0}{0}$. Fie limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, unde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Se recomandă, dacă este posibil, să se descompună în factori expresiile $f(x)$ și $g(x)$ sau să se amplifice raportul $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ cu expresii conjugate, simplificînd apoi cu $x - x_0$, sau să se aplice limita remarcabilă **1** ori limitele din exercițiul rezolvat **1**, secvența 3.2.

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{3x^2-2x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(3x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{3x+1}=\frac{3}{4}.$

(Simplificarea cu $x-1$ a fost posibilă, deoarece $x\to 1$, şi $x\neq 1$.)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(2x+x^6))}{4x-x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(2x+x^6))}{\sin(2x+x^6)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x+x^6)}{4x-x^2}=$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x+x^6)}{4x-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x+x^6)}{2x+x^6}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+x^6}{4x-x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(2+x^5)}{x(4-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+x^5}{4-x}=\frac{1}{2}.$

Similar cu exemplul **1** se calculează limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$, unde P şi Q sînt polinoame.

Fie $P, Q\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ polinoame nenule.

a) Dacă $P(x_0)=Q(x_0)=0$, atunci există polinoamele $P_1, Q_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $i, j\in\mathbb{N}^*$, astfel încît $P_1(x_0)\neq 0$, $Q_1(x_0)\neq 0$, $P(x)=(x-x_0)^i P_1(x)$, $Q(x)=(x-x_0)^j Q_1(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{j-i}}.$

b) Dacă $P(x_0)\neq 0$, iar $Q(x_0)=0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^j}=\infty.$

II. Cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$ apare la calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, unde $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$.

Se recomandă, dacă este posibil, să se depisteze la numitorul şi numărătorul raportului $\frac{f(x)}{g(x)}$ funcțiile (termenii) care cresc cel mai repede la infinit, numite ***funcții dominante***; să se extragă forțat ca factori comuni aceste funcții şi să se transforme în mod echivalent expresiile obținute, aplicînd, dacă este necesar, limitele remarcabile sau limitele din exercițiul rezolvat **1**, secvența 3.2.

Exemplu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^{x+1}}{4^{x+1}+2^{x+2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\right]}{4^{x+1}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+3}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^x}=\frac{1}{4}\cdot 0\cdot\frac{0+3}{1+0}=0,$$

unde funcțiile dominante sînt 3^x şi 4^{x+1}.

III. Cazul exceptat $0\cdot\infty$ apare la calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$, unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Se recomandă să se efectueze transformarea echivalentă $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{(f(x))^{-1}}$, $f(x)\neq 0$, sau $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$, $g(x)\neq 0$, pentru a obține unul dintre cazurile exceptate $\dfrac{\infty}{\infty}$ sau $\dfrac{0}{0}$.

Exemplu

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{2}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y\cdot\sin 2y}{y^2}=$$

$$=2\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{\sin 2y}{2y}\right)=2\cdot 1\cdot 1=2,\ \text{unde } y=\frac{1}{x}\to 0 \text{ cînd } x\to\infty.$$

IV. Cazul exceptat $\infty-\infty$ apare la calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$, unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ şi $a=+\infty$, $b=+\infty$ sau $a=-\infty$, $b=-\infty$.

Se recomandă să se efectueze transformarea echivalentă a expresiei $f(x)-g(x)$ prin aducere la numitor comun sau prin raționalizare cu expresii conjugate, sau prin aplicarea identității $f(x)-g(x)=\dfrac{(g(x))^{-1}-(f(x))^{-1}}{(f(x)\cdot g(x))^{-1}}$, $f(x)\cdot g(x)\neq 0$, etc. pentru a obține unul dintre cazurile exceptate $\dfrac{0}{0}$ sau $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemple

1. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x+1}-\frac{x^2-1}{2x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+4x}{4x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{4x^2}=-\frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+5}-x)(\sqrt{x^2+4x+5}+x)}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=2.$$

V. Cazurile exceptate 1^∞, 0^0, ∞^0 apar la calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$.

***Se recomandă*:**

a) *în cazul exceptat* 1^∞ să se aplice limitele remarcabile privind numărul e;

b) *în cazurile exceptate* $1^\infty, 0^0, \infty^0$ să se utilizeze identitatea logaritmică fundamentală $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$, $f(x)>0$, şi relația $\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$ (propoziția ⑤ din § 2), care plasează exponentul $g(x)\cdot\ln f(x)$ în cazul exceptat $0\cdot\infty$.

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x+1}=(1^{\infty})=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+1}{x+3}-1\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2(2x+1)}{x+3}}=$

$=\left[\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2(2x+1)}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\left(2+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{3}{x}}}=e^{-4}$, unde $y=-\frac{2}{x+3}\to 0$ cînd $x\to+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}}=e^{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}}=e^{2+0}=e^2.$

În modulul 4 vor fi formulate regulile lui l'Hospital pentru calculul limitelor de funcții în cazurile exceptate $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$. Consecințe ale acestor reguli sînt următoarele limite:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^{\alpha}}=0\quad(\alpha>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^x}=0\quad(\alpha>0,\ a>1)$

Aceste limite sînt utile în cazurile exceptate $\frac{\infty}{\infty}$ și $0\cdot\infty$.

Observație. Dacă $x\to+\infty$ și $\alpha>0$, $a>1$, atunci funcțiile logaritmică $\log_a x$, putere x^{α} și exponențială a^x tind la plus infinit. Din limitele **1** și **2** rezultă că cea mai „lentă” este funcția $\log_a x$, mai „rapidă” este funcția x^{α}, iar cea mai „rapidă” este funcția a^x.

Această observație se aplică la determinarea funcțiilor dominante în cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$.

Exerciții propuse

B

1. Să se calculeze:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2-x-2)}{(x^2+x-6)^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^5(3x+1)^5}{(2x+6)^{10}}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}+3\sqrt{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+5x+2}{\sqrt[3]{x}+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x-4^x}{2^x-4^x}$;

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x-4^x}{2^x-4^x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-4^x}{2^x-4^x}$;

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+x^6)}{\ln(x^4+x^{10})}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+x^6)}{\ln(x^4+x^{10})}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1-x^3+x^6)}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+e^{5x})}{\ln(x^{10}+e^{4x})}$;

12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+e^{5x})}{\ln(x^{10}+e^{4x})}$;

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)$;

14) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$;

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$;

16) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}-\frac{x^2+3}{x-1}\right)$;

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{4x+3}\right)^{x^2}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{5-2x}$; 20) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+4x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 21) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

22) $\lim\limits_{x\to2}(x^2+x-5)^{\frac{1}{x-2}}$; 23) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$; 24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x+1}-\dfrac{x^2-2x-1}{x-1}\right)$;

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}{[(4x)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$, $n\geq1$; 26) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$, $n\geq1$;

27) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$; 28) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3^{-x}+2^{3x})}{\ln(e^{-x}+e^{2x})}$; 29) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+3}-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})]$;

30) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{6\sin^2x+\sin x-2}{4\sin^2x-8\sin x+3}$; 31) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\operatorname{tg}x}{2+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 2x}}$; 32) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos2x}{\cos5x}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}$;

33) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\ln(x^2+x^3)}}$; 34) $\lim\limits_{x\to+0}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}}$; 35) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}}$.

2. Să se determine valorile parametrilor $a, b\in\mathbb{R}$, dacă $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{4x^2-x^3}+ax+b)=\dfrac{1}{3}$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}(a\sqrt{x^2+x}+b\sqrt{4x^2+x})$ şi să se discute după valorile parametrilor $a, b\in\mathbb{R}$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{x+1}$. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ din condiţiile $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=3$, apoi să se calculeze $\lim\limits_{x\to-1\pm0}f(x)$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1, & \text{dacă } x<2\\ b+\ln(x-1), & \text{dacă } x\geq2.\end{cases}$ Să se determine valorile parametrilor $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încît să existe limitele $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$, iar $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$.

Exerciţii şi probleme recapitulative

B

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{8-6x+x^2}{2+3x-2x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{(1-2x)(3x+4)}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2+x)(1+3x)-2}{9-(3-2x)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}{(3-2x)^3}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x}{x+1}-\dfrac{2x^2+5x}{x-2}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x^3}}{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}}$;

g) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{6-10x}-4}{2x^2-3x-5}$; h) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{5-\sqrt{10x+5}}$; i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{x-1}$;

j) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{5+x}}{\sqrt[3]{1+2x}+1}$; k) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7-6x}-\sqrt[5]{16-15x}}{\sqrt[6]{9-8x}-1}$;

l) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-x+1})$; m) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2})$;

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$.

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x+\sin 4x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x+2\sin x}{3\sin 2x-\operatorname{tg}x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \arcsin 6x}{\operatorname{tg}^2(3x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x-3\operatorname{arctg}2x}{\operatorname{arctg}6x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{2^{3x}+3^{2x}-2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\operatorname{tg}6x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2(2x)}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos 2x-\cos 3x}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin 3x)}{e^{5x}-e^{3x}}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 6x)}{\ln(\cos 3x)}$; k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+4}$; l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\sin 2x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 3^x}{1+x\cdot 5^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. Să se calculeze limitele laterale:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{|1-x|}{\sqrt{x^2-1}}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{1}{2-2^{\frac{x}{2-x}}}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{1-2^x}$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x-2}{\ln(1+x)}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{1}{3-3^{\frac{1+|x|}{1-x^2}}}$.

4. Să se determine valorile parametrului $a\in\mathbb{R}$, astfel încît să existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$:

a) $f(x)=\begin{cases}4x^2+a, & \text{dacă } x\le 1\\ \sqrt{5x+4}+2a^2, & \text{dacă } x>1,\end{cases}$ $x_0=1$;

b) $f(x)=\begin{cases}a^2+3x+2, & \text{dacă } x<0\\ 5\sqrt{a^2+x^2}-2, & \text{dacă } x\ge 0,\end{cases}$ $x_0=0$;

c) $f(x)=\begin{cases}x^2\sqrt{3a+1}+ax+a, & \text{dacă } x\le -1\\ x^2-x\sqrt{a+4}, & \text{dacă } x>-1,\end{cases}$ $x_0=-1$;

d) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2x^2+1}, & \text{dacă } x<1\\ 1+2ax, & \text{dacă } x\ge 1,\end{cases}$ $x_0=1$.

5. Să se determine valorile parametrilor $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încît:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2+ax+b)}{2x^2-3x+1}=3$, dacă $a+b=-1$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{x-2}+ax+b\right)=6$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{ax}-ae^{bx}}{x}=-4$.

6. Secțiunea verticală a reliefului unei localități de munte este dată de funcția $f\colon\left[-6, \dfrac{11}{2}\right]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}1-6x-x^2, & \text{dacă } x\in[-6, -1),\\ 0{,}1x+2{,}1, & \text{dacă } x\in[-1, 1],\\ -0{,}45x^2+2{,}7x-0{,}05, & \text{dacă } x\in\left(1, \dfrac{11}{2}\right],\end{cases}$$

la scara 1 : 100 m pe fiecare axă de coordonate. Pe platoul dintre cei doi munți ce corespunde valorilor abscisei $x\in[-1, 1]$ este situat un cătun.

a) Să se traseze graficul funcției f și să se stabilească abscisele vîrfurilor munților.
b) Să se determine diferența dintre înălțimile celor două vîrfuri.
c) Să se afle înălțimea peretelui vertical al muntelui, ce corespunde abscisei $x=-1$.
d) Să se calculeze unghiul de înclinație a platoului pe care este situat cătunul.
e) Care este adîncimea minimă a fîntînilor din cătun, dacă axa Ox reprezintă nivelul pînzei apelor freatice?

7. Graficul funcției $f\colon [-10{,}2;\ 52] \to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \frac{1}{200}x^2-\frac{1}{50}, & \text{dacă } x\in[-10{,}2;\ 2] \\ \frac{1}{5000}(x-2)^2+\frac{1}{1000}, & \text{dacă } x\in(2;\ 52], \end{cases}$

reprezintă relieful subacvatic al unei mări la scara 1 : 10 000 m, astfel încît suprafața mării corespunde liniei orizontale $y=0{,}5$.
a) Să se traseze graficul funcției f și să se determine adîncimea maximă a mării.
b) Care este lățimea mării, dacă ea corespunde liniei orizontale $y=0{,}5$?
c) Să se determine înălțimea rupturii plăcilor tectonice în punctul de abscisă $x=2$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

B

În itemii 1 și 2 indicați litera corespunzătoare variantei corecte.

1. Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} m^2-\sqrt{4-2x}, & \text{dacă } x\le 0 \\ \frac{\sin mx}{x}, & \text{dacă } x>0, \end{cases}$ $m\in\mathbb{R}$, are limită în $x_0=0$, dacă ②

A $m=2$. **B** $m\in\{-1,\ 3\}$. **C** $m\in\{-1,\ 2\}$. **D** $m=-1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b-\sqrt{ax^2+bx+1})=4,\ \ a,\ b\in\mathbb{R}$, dacă ②

A $a=0,\ b=4$. **B** $a=1,\ b\in\mathbb{R}$. **C** $a=1,\ b=8$. **D** $a\in\{0,\ 1\},\ b\in\mathbb{R}$.

3. Fie $l_1=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+2x-3)^2}{(x^2-1)^2},\ l_2=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}\right)^2,\ l_3=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+x-2)^2}{(x^2-3x+2)^2}$. ④

a) Calculați l_1 și l_3.

b) Fără a calcula limita l_2, stabiliți valoarea $l=l_1l_2l_3$.

c) Utilizînd rezultatul punctului b), determinați valoarea limitei l_2.

d) Rezolvați inecuația $\log_{l_2}(x-l_1)+\log_{l_2}(l_3-x)\ge\log_{l_2}9-\log_{l_2}l$.

4. Calculați: ②

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{10-3x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt[4]{9-4x}-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin5x-3\sin\frac{x}{2}}{\sin2x-4\sin\frac{3x}{2}+\sin6x}$.

Limite de funcții

Mulțime
$E \subseteq \mathbb{R}$

Punct de acumulare
$\forall V(x_0)$ are loc relația $V(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$, unde $V(x_0)$ este vecinătate a punctului x_0

Criteriu de existență a punctului de acumulare pentru o mulțime
x_0 este punct de acumulare pentru $E \Leftrightarrow E \supset (x_n)_{n\geq 1},\ x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Funcție
$f\colon E \to \mathbb{R}$

Limită de funcție
$l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Limite laterale
$l_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x);\ l_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$

Criteriu de existență a limitei unei funcții într-un punct
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \exists l_s(x_0) = l_d(x_0) = l$

Operații cu limite de funcții
1. $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)] = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, c – const.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Proprietăți ale funcțiilor ce au limită în punct
1° Dacă există limita unei funcții într-un punct, atunci ea este unică.

2° Dacă limita unei funcții într-un punct este mai mică (mai mare) decît limita altei funcții în acest punct, atunci pe o vecinătate a punctului și prima funcție este mai mică (mai mare) decît funcția a doua.

3° Dacă limita unei funcții în punct este pozitivă (negativă), atunci pe o vecinătate a acestui punct funcția își păstrează semnul, adică este pozitivă (negativă).

4° Dacă o funcție are limită finită într-un punct, atunci pe o vecinătate a acestui punct ea este mărginită.

5° Într-o inegalitate de funcții se poate trece la limită, păstrînd semnul inegalității.

6° Compoziția de funcții ce au limită într-un punct este o funcție ce are limită în acest punct.

7° Dacă f este o funcție elementară, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, unde x_0 este orice punct din domeniul de definiție al acestei funcții.

Limite remarcabile
❶ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

❷ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Forme exceptate la operații cu limite de funcții
$\dfrac{0}{0};\ \dfrac{\infty}{\infty};\ \infty-\infty;\ 0\cdot\infty;\ 1^\infty;\ 0^0;\ \infty^0.$

Calcularea formelor exceptate
$\mathbf{\dfrac{0}{0}}$ – prin metoda dezvoltării în factori, prin amplificări cu expresii conjugate sau prin utilizarea unor limite cunoscute.

$\mathbf{\dfrac{\infty}{\infty}}$ – prin extragerea ca factor a funcțiilor ce cresc cel mai rapid la infinit.

$\mathbf{\infty-\infty}$ – prin aducerea la numitor comun sau prin amplificări cu expresii conjugate.

$\mathbf{0\cdot\infty}$ – prin transformarea echivalentă a produsului într-un cît de două funcții.

$\mathbf{1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0}$ – prin utilizarea limitelor remarcabile pentru numărul e sau a identității logaritmice fundamentale.

Ordinea în care funcțiile cresc la infinit
1. Cea mai lentă este funcția logaritmică:
   $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x,\ a\in\mathbb{R}_+^*,\ a\neq 1.$
2. Mai rapidă este funcția putere:
   $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}^*.$
3. Și mai rapidă este funcția exponențială:
   $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = a^x,\ a\in\mathbb{R}_+^*,\ a\neq 1.$
4. Cea mai rapidă este funcția factorial:
   $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = n!.$

Modulul

3 Funcții continue

Obiective

- *studierea continuității, identificarea punctelor de discontinuitate în baza formulei analitice sau pe graficele funcțiilor date;
- *aplicarea în diverse contexte a noțiunilor *funcție continuă*, *funcție continuă lateral*, *funcție discontinuă într-un punct* sau *pe o mulțime* la rezolvări de probleme;
- *aplicarea operațiilor aritmetice cu funcții continue într-un punct sau pe un interval în diverse contexte;
- *utilizarea proprietăților funcțiilor continue pe un interval în diverse contexte.

Fie funcția $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$. În modulul 2 am studiat comportarea funcției f în vecinătatea unui punct de acumulare x_0 al mulțimii E. Punctul x_0 nu aparținea în mod necesar mulțimii E, iar în cazul în care x_0 aparținea lui E, valoarea funcției f în x_0 nu era luată în considerație.

În acest modul vom studia comportarea funcției f nu numai în vecinătatea punctului x_0, dar și în însuși x_0, și anume: vom compara valoarea funcției f în x_0 cu valorile sale în punctele vecine cu x_0. Pentru aceasta este necesar ca funcția f să fie definită în punctul x_0, adică x_0 să aparțină mulțimii E.

§1 Funcții continue într-un punct. Funcții continue pe o mulțime


Bernhard Bolzano

De noțiunea *limita funcției* este strîns legată o altă noțiune importantă a analizei matematice – *continuitatea funcției*. Această noțiune a fost definită într-o formă riguroasă de către matematicienii B. Bolzano[1] și A. L. Cauchy.

1.1. Noțiunea de continuitate

În mod intuitiv, afirmațiile *o curbă este continuă* și *o curbă nu are întreruperi,* adică poate fi trasată fără a ridica creionul de pe hîrtie, sînt echivalente.

Noțiunile *funcție continuă, funcție discontinuă* (*într-un punct* sau *pe o mulțime*) pot fi înțelese cu ușurință observînd graficele unor funcții. Să examinăm cîteva exemple.

[1] Bernhard Bolzano (1781–1848) – filozof, logician și matematician ceh de origine italiană.

Exemple

1. Presupunem că pe axa numerelor se mişcă uniform un mobil care în momentul $t=0$ se află în origine. Dacă viteza presupusă constantă a mobilului este v, atunci, notînd cu $s(t)$ distanța parcursă de mobil în timpul t, obținem ecuația $s(t)=vt,\ t\geq 0$. Graficul funcției $s\colon [0, +\infty)\to \mathbb{R},\ s(t)=vt$, este reprezentat în figura 3.1.

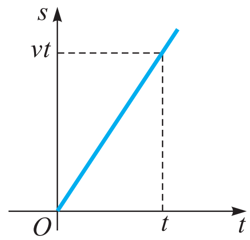


Fig. 3.1

2. Considerăm funcțiile $f, g, h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\leq 1\\ 1, & \text{dacă } x>1,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x<1\\ 2, & \text{dacă } x=1\\ 1, & \text{dacă } x>1,\end{cases}\quad h(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\leq 1\\ 1+x, & \text{dacă } x>1.\end{cases}$$

Graficele acestor funcții sînt reprezentate în figura 3.2.

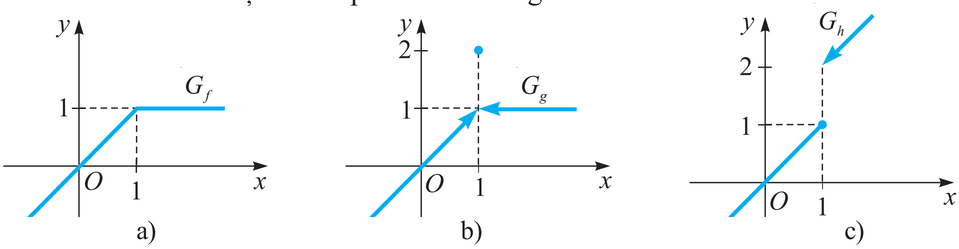


Fig. 3.2

Graficele funcțiilor s (fig. 3.1) şi f (fig. 3.2 a)) pot fi trasate printr-o mişcare continuă a creionului, iar graficele funcțiilor g şi h (fig. 3.2 b), c)) sînt întrerupte în punctul de abscisă $x_0=1$.

Pentru a pune în evidență deosebirile dintre comportarea funcțiilor f, g şi h în punctul $x_0=1$, vom compara limitele lor laterale în $x_0=1$ cu valorile lor respective în acest punct:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} x=1,\ \ f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} 1=1,\ \ f(1)=1;$$

$$g(1-0)=\lim_{x\to 1-0} g(x)=\lim_{x\to 1-0} x=1,\ \ g(1+0)=\lim_{x\to 1+0} g(x)=\lim_{x\to 1+0} 1=1,\ \ g(1)=2;$$

$$h(1-0)=\lim_{x\to 1-0} h(x)=\lim_{x\to 1-0} x=1,\ \ h(1+0)=\lim_{x\to 1+0} h(x)=\lim_{x\to 1+0} (1+x)=2,\ \ h(1)=1.$$

Funcțiile f şi g în punctul $x_0=1$ au limita 1, adică $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ şi $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=1$. Constatăm că $f(1)=1,\ g(1)=2$. Graficul funcției g se întrerupe în punctul de abscisă $x_0=1$, deoarece $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=1$, iar $g(1)=2$. Graficul funcției h de asemenea se întrerupe în punctul de abscisă $x_0=1$, deoarece limitele ei laterale în acest punct sînt diferite (funcția h nu are limită în punctul $x_0=1$). Astfel deducem că graficul funcției f nu se întrerupe în punctul de abscisă $x_0=1$ din două motive:

1) există $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

2) această limită este egală cu valoarea funcției f în punctul $x_0=1$.

În baza acestor considerații, putem formula următoarea

Definiție. Fie funcția $f\colon E\to\mathbb{R}$ şi un punct $x_0\in E$ de acumulare pentru E. Spunem că funcția f este **continuă în punctul** x_0 dacă ea are limită în acest punct şi această limită este egală cu valoarea funcției în x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Observație. Dacă x_0 nu este punct de acumulare, adică este punct izolat, considerăm, prin definiție, că funcția este ***continuă*** într-un astfel de punct.

Ținînd seama de această observație, în continuare vom pune problema continuității unei funcții *numai* în punctele de acumulare ale domeniului ei de definiție.

Definiția continuității unei funcții f într-un punct x_0 se bazează pe noțiunea de limită a funcției f în acest punct x_0. De aceea unele proprietăți ale limitelor de funcții se vor regăsi și în cazul funcțiilor continue.

Utilizînd definițiile limitei unei funcții într-un punct, obținem caracterizări ale continuității.

Teorema 1. Fie funcția $f: E \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in E$.

1. Funcția f este continuă în punctul $x_0 \Leftrightarrow$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît pentru orice $x \in E$ din $|x - x_0| < \delta$ rezultă că $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. f este continuă în $x_0 \Leftrightarrow$ pentru orice șir $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E$, din faptul că $x_n \to x_0$ cînd $n \to \infty$ rezultă că șirul respectiv $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge la $f(x_0)$, adică $f(x_n) \to f(x_0)$ cînd $n \to \infty$.

3. f este continuă în $x_0 \Leftrightarrow$ există limitele laterale (x_0 un punct interior mulțimii E):

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) \text{ și } f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Propozițiile 1–3 semnifică existența limitei funcției f în punctul x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dacă funcția f este continuă în punctul $x_0 \in E$, atunci x_0 se numește ***punct de continuitate*** al funcției f. În cazul cînd funcția f nu este continuă în punctul $x_0 \in E$, ea se numește ***discontinuă în punctul*** $\boldsymbol{x_0}$, iar x_0 se numește ***punct de discontinuitate*** al funcției f.

Funcția f continuă în orice punct al unei mulțimi $A \subseteq E$ se numește ***continuă pe mulțimea*** $\boldsymbol{A}$.

În cazul în care $A = E$, în loc să spunem că f este continuă pe tot domeniul său de definiție, putem spune, mai simplu, că f ***este o funcție continuă*** (fără a mai menționa pe care mulțime).

Observație. S-a demonstrat că limita funcțiilor elementare în orice punct x_0 din domeniul lor de definiție se calculează înlocuind x cu x_0 direct în funcție, adică $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Astfel, funcțiile elementare (polinomiale, raționale, exponențiale etc.) sînt continue pe orice interval pe care sînt definite.

Concluzie. Funcțiile elementare sînt continue în orice punct din domeniul lor de definiție.

Exemple

1. Funcția f (fig. 3.2 a)) este continuă în punctul $x_0 = 1$, iar funcțiile g, h (fig. 3.2 b), c)) sînt discontinue în acest punct.

2. Funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = 3^x$, fiind elementare, sînt continue pe $\mathbb{R}$, iar funcția $\varphi: (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sqrt{1 - 3^x}$, este continuă pe $(-\infty, 0]$ din aceleași considerente.

Exercițiu rezolvat

Să se studieze continuitatea funcției $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x\in(0,\ 1] \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{dacă } x\in(1,\ +\infty). \end{cases}$

Rezolvare:

Cînd se cere să studiem continuitatea unei funcții fără a fi precizat un anume punct, subînțelegem că trebuie să studiem problema pe întreg domeniul de definiție.

Funcția f, fiind definită pe $(0,\ 1]$ prin $f(x)=x^2$ și pe $(1,\ +\infty)$ prin $f(x)=\dfrac{x+1}{2}$, este continuă pe aceste intervale (fig. 3.3). Urmează să studiem continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

Avem: $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} x^2=1,$

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x+1}{2}=1$ și $f(1)=1.$

Deci, $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$. Conform teoremei 1 (propoziția 3), funcția f este continuă și în punctul $x_0=1$.

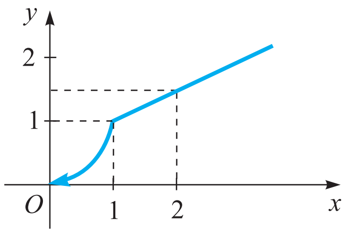


Fig. 3.3

Răspuns: Funcția f este continuă pe $(0,\ +\infty)$.

1.2. Puncte de discontinuitate

Punctele de discontinuitate ale unei funcții pot fi de două spețe (categorii).

Fie funcția $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ și punctul $x_0\in E$ (x_0 punct interior mulțimii E).

Definiție. Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța întîi** pentru funcția f dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sînt finite, însă $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ sau $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$.

Exerciții rezolvate

1. Fie funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x<0 \\ 2, & \text{dacă } x\geq 0. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

Rezolvare:

$f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\quad f(+0)=\lim\limits_{x\to +0} f(x)=2.$

Cum $f(-0)\neq f(+0)$, rezultă că $x_0=0$ este un punct de discontinuitate de speța întîi pentru funcția f.

2. Fie funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{dacă } x<1 \\ 1, & \text{dacă } x=1 \\ 2, & \text{dacă } x>1. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare:

Funcția f este continuă pe mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, iar în punctul $x_0=1$ avem $f(1-0)=f(1+0)=2$ și $f(1)=1$ (fig. 3.4).

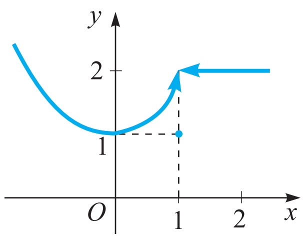


Fig. 3.4

Prin urmare, funcția f nu este continuă în punctul $x_0=1$, avînd în acest punct o discontinuitate de speța întîi.

Definiție. Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța a doua** pentru funcția f dacă el nu este punct de discontinuitate de speța întîi.

Din definiție rezultă că într-un punct de discontinuitate de speța a doua fie cel puțin o limită laterală este infinită (adică egală cu ∞), fie cel puțin o limită laterală nu există.

Exerciții rezolvate

1. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{dacă } x<0\\ 1, & \text{dacă } x\geq 0.\end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f (fig. 3.5) în punctul $x_0=0$.

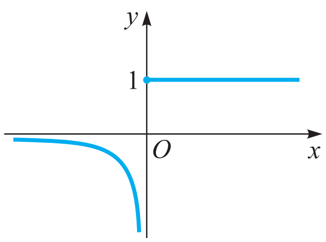


Fig. 3.5

Rezolvare:

$\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$. Prin urmare, $x_0=0$ este un punct de discontinuitate de speța a doua pentru funcția f.

2. Considerăm funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ 0, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

Să se arate că funcția f este continuă în punctul $x_0=0$ și orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ este punct de discontinuitate de speța a doua pentru această funcție.

Rezolvare:

Fie $x_0=0$ și un șir arbitrar $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n\to 0$ cînd $n\to\infty$. Atunci $f(x_n)=\begin{cases}x_n, & x_n\in\mathbb{Q}\\ 0, & x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ și, evident, $f(x_n)\to 0=f(0)$ cînd $n\to\infty$. Deci, funcția f este continuă în punctul $x_0=0$.

Fie acum un oarecare $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vom arăta că nu există limita la stînga a funcției f în punctul x_0. Considerăm două șiruri, $(x'_n)_{n\geq 1}$, $x'_n\in\mathbb{Q}$, și $(x''_n)_{n\geq 1}$, $x''_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, astfel încît $x'_n\to x_0-0$ și $x''_n\to x_0-0$ cînd $n\to\infty$. Atunci, conform definiției funcției f, rezultă că $f(x'_n)=x'_n\to x_0$, iar $f(x''_n)=0\to 0$ cînd $n\to\infty$. Însă $x_0\neq 0$. Astfel, am arătat că există două șiruri, $(x'_n)_{n\geq 1}$ și $(x''_n)_{n\geq 1}$, care converg la stînga la x_0, însă șirurile respective, $(f(x'_n))_{n\geq 1}$ și $(f(x''_n))_{n\geq 1}$, converg la limite diferite. Aceasta înseamnă că nu există $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Deci, x_0 este un punct de discontinuitate de speța a doua pentru funcția f.

Definiție. Fie funcția $f\colon E\to\mathbb{R}$ și x_0 un punct interior mulțimii E. Dacă există limitele laterale finite $f(x_0-0)$ și $f(x_0+0)$, atunci diferența $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ se numește **saltul funcției** f în punctul x_0.

De exemplu, funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sgn} x$, are în punctul $x_0=0$ un salt egal cu 2 (fig. 3.6 a)).

Observații. **1.** Evident, saltul unei funcții f într-un punct de continuitate x_0 este egal cu zero, deoarece în acest caz $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

2. Saltul unei funcții f poate fi egal cu zero și într-un punct de discontinuitate x_0, dacă $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$.

De exemplu, fie funcția $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{ dacă } x\in[-\pi,0)\\ 1, \text{ dacă } x=0\\ \sin x, \text{ dacă } x\in(0,\pi].\end{cases}$$

Avem $f(-0)=f(+0)=0$, iar $f(0)=1$. Prin urmare, funcția f este discontinuă în punctul $x_0=0$ și saltul ei este egal cu zero (fig. 3.6 b)).

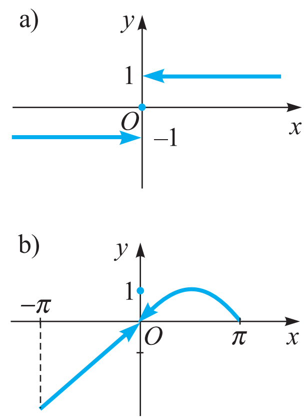


Fig. 3.6

1.3. Continuitatea laterală

Fie funcția $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ și $x_0\in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E_-=E\cap(-\infty,x_0)=\{x\mid x\in E,\ x<x_0\}$.

Definiție. Funcția f se numește **continuă la stînga** în punctul x_0 dacă în x_0 există limita la stînga $f(x_0-0)$ și $f(x_0-0)=f(x_0)$.

Fie funcția $f\colon E\to\mathbb{R}$ și $x_0\in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E_+=E\cap(x_0,+\infty)=\{x\mid x\in E,\ x>x_0\}$.

Definiție. Funcția f se numește **continuă la dreapta** în punctul x_0 dacă în x_0 există limita la dreapta $f(x_0+0)$ și $f(x_0+0)=f(x_0)$.

Exemple

1. Funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\le 0\\ -1, \text{ dacă } x>0,\end{cases}$ este continuă la stînga în punctul $x_0=0$, întrucît $f(-0)=1=f(0)$, și nu este continuă la dreapta în acest punct, deoarece $f(+0)=-1$, iar $f(0)=1$, adică $f(+0)\neq f(0)$.

2. Funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x<0\\ -1, \text{ dacă } x\ge 0,\end{cases}$ este continuă la dreapta în punctul $x_0=0$, fiindcă $f(+0)=-1=f(0)$, și nu este continuă la stînga în acest punct, deoarece $f(-0)=1$, iar $f(0)=-1$, adică $f(-0)\neq f(0)$.

Observații. **1.** Funcția $f\colon E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ este continuă în punctul $x_0\in E$ (x_0 – punct interior mulțimii E) dacă și numai dacă ea este continuă și la stînga, și la dreapta în x_0 (a se compara cu teorema 1, propoziția 3).

2. Dacă $E=[a, b]$, atunci problema continuității la stînga în punctul a şi respectiv la dreapta în punctul b nu are sens. În plus, funcția $f: [a, b]\to\mathbb{R}$ este continuă în a (respectiv în b) dacă şi numai dacă f este continuă la dreapta în a (respectiv la stînga în b).

Exerciții rezolvate

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x + a\cos x, & \text{dacă } x<0 \\ 1, & \text{dacă } x=0 \\ x^2+b, & \text{dacă } x>0, \end{cases}$ $a, b\in\mathbb{R}$.

Să se determine valorile parametrilor reali a şi b pentru care funcția f este:

a) continuă la stînga în punctul $x_0=0$;

b) continuă la dreapta în punctul $x_0=0$;

c) continuă pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to -0}(e^x + a\cos x)=1+a$. În baza definiției, funcția f este continuă la stînga în punctul $x_0=0$ dacă şi numai dacă $f(-0)=f(0)\Leftrightarrow 1+a=1\Leftrightarrow a=0$ şi $b\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=\lim\limits_{x\to +0}(x^2+b)=b$. Conform definiției, funcția f este continuă la dreapta în punctul $x_0=0$ dacă şi numai dacă $f(+0)=f(0)\Leftrightarrow b=1$ şi $a\in\mathbb{R}$.

c) Funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, +\infty)$ pentru orice valori ale parametrilor a şi b. În punctul $x_0=0$ funcția f este continuă dacă şi numai dacă $f(-0)=f(+0)=f(0)\Leftrightarrow a=0$ şi $b=1$.

Răspuns: a) $a=0, b\in\mathbb{R}$; b) $a\in\mathbb{R}, b=1$; c) $a=0, b=1$.

2. Să se studieze continuitatea la stînga şi la dreapta a funcției $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 3x-2, & \text{dacă } x\le 1 \\ x^2+1, & \text{dacă } x>1. \end{cases}$$

Rezolvare:

Pentru $x<1$ şi $x>1$ funcția f, fiind elementară, este continuă. Studiem continuitatea ei în punctul $x=1$. Calculăm limitele laterale: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1=f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2\neq f(1)$. Prin urmare, f este continuă la stînga în punctul $x=1$ şi nu este continuă la dreapta în acest punct.

Exerciții propuse

B

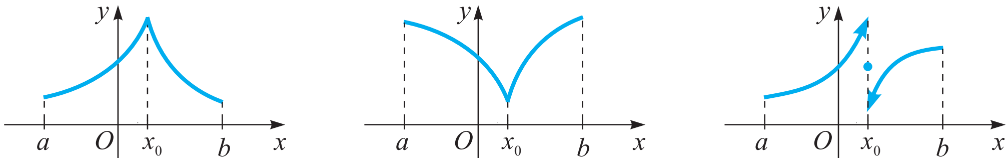
1. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-1$, este continuă în punctele $x_0=0$ şi $x_1=2$.

2. Să se studieze continuitatea funcției f pe domeniul ei de definiție:

a) $f: [-1; 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+x+\dfrac{x}{x+3}$; b) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2+1}$;

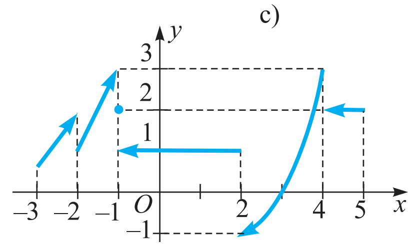
c) $f: (-3, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+\ln(x+4)$.

3. Să se afle intervalele de continuitate ale funcției $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ reprezentate grafic:



a) b) c)

4. Funcția $f\colon [-3, 5] \to \mathbb{R}$ este reprezentată grafic în figura alăturată.
a) Să se indice intervalele pe care funcția f este continuă.
b) Să se calculeze: $f(-1)\cdot f(0)$, $f(2)\cdot f(4)$, $f(0)\cdot f(-1)$, $f(0)\cdot f(4{,}5)$.



5. Aplicînd inegalitatea $|\sin x| \le |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, să se demonstreze continuitatea funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \sin x$; b) $g(x) = \cos x$; c) $f(x) = \sin 2x$; d) $f(x) = \cos 2x$.

6. Fie funcția $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$. Să se arate că există $\delta > 0$, astfel încît pentru orice x cu $|x-2| < \delta$ are loc $|f(x) - 6| < \dfrac{1}{10}$. Rezultă de aici că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 2$?

7. Să se stabilească dacă este continuă pe $\mathbb{R}$ funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = |x+1|$; b) $f(x) = x + |x-1|$;
c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{dacă } x \ne 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 2{,}7, & \text{dacă } x \le 0. \end{cases}$

8. Se consideră funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax, & \text{dacă } x \le 1 \\ x^3 + a^3, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$.
Să se determine valorile parametrului a pentru care funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

9. Să se afle punctele de discontinuitate și să se calculeze în aceste puncte saltul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^n, & \text{dacă } x \le 1 \\ \sin(x-1), & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x+1), & \text{dacă } x \le 0 \\ 2, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

10. Să se studieze continuitatea funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 2, & \text{dacă } x = 0 \\ \dfrac{\sin 2x}{2}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

11. Să se studieze continuitatea și să se traseze graficul funcției:
a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \begin{cases} \dfrac{x}{n}, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ b) $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x^{2n} + x^{2n+2})$.

12. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + be^x, & \text{dacă } x < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ 1 - ax, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$
Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este continuă:
a) la stînga în punctul $x_0 = 1$; b) la dreapta în punctul $x_0 = 1$.

§2 Operații cu funcții continue

Vom arăta că operațiile aritmetice asupra funcțiilor continue, precum și compunerea acestora conservă continuitatea.

2.1. Suma, produsul și cîtul de funcții continue

Teorema 2. Dacă $f, g: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ sînt funcții continue într-un punct $x_0 \in E$, atunci funcțiile αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ sînt continue în x_0. Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci și $\dfrac{f}{g}$ este o funcție continuă în x_0.

Demonstrație

Vom demonstra continuitatea funcțiilor αf și $f+g$.

Conform ipotezei, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ și $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Atunci

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha f(x_0) \text{ și}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0), \text{ adică}$$

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = (\alpha f)(x_0) \text{ și } \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = (f+g)(x_0).$$

Prin urmare, funcțiile αf și $f+g$ sînt continue în punctul x_0. ►

Exercițiu. Demonstrați continuitatea funcțiilor $f-g$, $f \cdot g$ și $\dfrac{f}{g}$.

Această teoremă, stabilită local (într-un singur punct x_0), se poate extinde la nivelul unei mulțimi, în particular, pe tot domeniul de definiție E.

Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \sin x + x$, este continuă pe $\mathbb{R}$ ca sumă a trei funcții elementare continue pe $\mathbb{R}$.

2. Funcția definită prin $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ este continuă pe mulțimea $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, fiind cîtul a două funcții continue pe această mulțime și avînd numitorul nenul pe E.

3. Funcția definită prin $f(x) = \operatorname{tg} x$ este continuă pe mulțimea $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, deoarece $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(\cos x \neq 0,\ x \in E)$ și sinus, cosinus sînt funcții continue pe E.

2.2. Compunerea funcțiilor continue

Teorema 3. Fie funcțiile $g: E_1 \to E_2$, $f: E_2 \to \mathbb{R}$ $(E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R})$ și compusa lor $h = f \circ g: E_1 \to \mathbb{R}$. Dacă funcția g este continuă în punctul $x_0 \in E_1$ și funcția f este continuă în punctul $y_0 = g(x_0) \in E_2$, atunci funcția h este continuă în x_0.

Demonstrație

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir arbitrar, $x_n \in E_1$ şi $x_n \to x_0$ cînd $n\to\infty$. Vom arăta că $h(x_n)\to h(x_0)$ cînd $n\to\infty$. Notăm $y_n = g(x_n)\in E_2$. Deoarece funcția g este continuă în punctul x_0, rezultă că $y_n = g(x_n)\to g(x_0) = y_0$ cînd $n\to\infty$. Cum funcția f este continuă în punctul y_0, obținem $f(y_n)\to f(y_0)$, adică $f(g(x_n))\to f(g(x_0))$, sau $h(x_n)\to h(x_0)$ cînd $n\to\infty$. Astfel, funcția $h = f\circ g$ este continuă în punctul x_0. ►

Observație. În condițiile teoremei 3 şi din definiția continuității rezultă următoarea egalitate: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$, care înseamnă că *limita „comută” cu toate funcțiile continue.*

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x} = e^0 = 1$ în baza continuității funcțiilor $f(x) = e^x$ şi $g(x) = \sin x$;

2. $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{tg}(2^{\sqrt{x}}) = \operatorname{tg}(\lim\limits_{x\to\pi} 2^{\sqrt{x}}) = \operatorname{tg}(2^{\lim\limits_{x\to\pi}\sqrt{x}}) = \operatorname{tg}2^{\sqrt{\pi}}$ în baza continuității funcțiilor a^x, $\operatorname{tg}x$ şi x^α în punctele respective.

Corolar. Dacă funcția $g\colon E_1\to E_2$ este continuă pe mulțimea E_1 şi funcția $f\colon E_2\to\mathbb{R}$ este continuă pe mulțimea E_2 $(E_1, E_2\subseteq\mathbb{R})$, atunci funcția $h = f\circ g\colon E_1\to\mathbb{R}$ este continuă pe E_1.

Aşadar, prin compunerea a două funcții continue se obține o funcție continuă, iar teoremele 2 şi 3 se extind la sume, produse, compuneri ale unui număr finit de funcții continue.

Exercițiu rezolvat

Fie $f, g\colon E\to\mathbb{R}$ funcții continue în punctul $x_0\in E$ (pe mulțimea E). Să se demonstreze că şi funcțiile $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sînt continue în x_0 (respectiv continue pe E).

Rezolvare:

Funcția $|f|$, adică $|f|(x) = |f(x)|$, poate fi reprezentată ca o compusă a două funcții continue: $|f| = \varphi\circ f$, unde $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|$, este funcția modul, care este continuă pe mulțimea E. În baza teoremei 3, funcția $|f|$ este continuă în punctul x_0 (respectiv continuă pe mulțimea E).

Continuitatea celorlalte două funcții rezultă din teorema 2 şi din relațiile:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}((f+g)+|f-g|),\quad \min(f, g) = \frac{1}{2}((f+g)-|f-g|).$$

Exerciții propuse

B

1. Să se studieze continuitatea funcției f şi să se traseze graficul ei:

a) $f\colon[-1, 4]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, \text{ dacă } -1\leq x<1\\ 1, \text{ dacă } x=1\\ x-1, \text{ dacă } 1<x\leq 4;\end{cases}$

b) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x\leq 1\\ \dfrac{2}{x-1}, \text{ dacă } x>1;\end{cases}$

c) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ dacă } -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{4} \\ 1, \text{ dacă } x = \frac{\pi}{4} \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, \text{ dacă } \frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x - [x].$

2. Fie f o funcție definită într-o vecinătate a punctului x_0. Folosind cuantificatorii $\exists, \forall,$ să se formuleze afirmația că funcția f nu este continuă în punctul x_0.

3. Fie funcția $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, \text{ dacă } x \ne 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$

Să se demonstreze că funcția f este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Să se stabilească dacă există valori ale parametrilor $a, b \in \mathbb{R},$ astfel încît funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie continuă pe tot domeniul de definiție $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, \text{ dacă } x \le 0 \\ ax + b, \text{ dacă } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, \text{ dacă } x \ge 1; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2 - 1}, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ a, \text{ dacă } x = -1 \\ b, \text{ dacă } x = 1. \end{cases}$

5. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x, \ g(x) = 1 + x^2;$

b) $f(x) = \operatorname{sgn} x, \ g(x) = x^3 - x;$

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x, \ g(x) = \sin x;$

d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1), \ g(x) = \operatorname{sgn}(x+1).$

1) Să se studieze continuitatea fiecăreia dintre funcțiile $f+g, \ f-g, \ f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$ pe domeniul său maxim de definiție.

2) Să se studieze continuitatea funcțiilor compuse $f \circ g$ și $g \circ f$.

6. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2, \ g(x) = x + 1;$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } x \le 0 \\ x-1, \text{ dacă } x > 0, \end{cases} \ g(x) = x - 1;$

c) $f(x) = [x], \ g(x) = e^x;$

d) $f(x) = [x], \ g(x) = \sin x;$

e) $f(x) = [x], \ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ dacă } x \ne 0 \\ 1, \text{ dacă } x = 0; \end{cases}$

f) $f(x) = [x], \ g(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Să se determine punctele de discontinuitate ale funcțiilor compuse $f \circ g$ și $g \circ f$.

7. Să se afle parametrul $a \in \mathbb{R},$ astfel încît funcția f să fie continuă pe domeniul său de definiție:

a) $f: [0, 3] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ dacă } x \in [0, 1] \\ 2ax + 1, \text{ dacă } x \in (1, 3]; \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 2^x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \\ a + x^2, \text{ dacă } x \in [0, +\infty); \end{cases}$

c) $f: [2, +\infty), \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3}, \text{ dacă } x \in [2, 3) \\ ax + \frac{1}{3}, \text{ dacă } x \in [3, +\infty); \end{cases}$

d) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin a(x-1)}{x-1}, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 3x - a, & \text{dacă } x \in [1, 2]; \end{cases}$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ ax^2 + x + \sin x, & \text{dacă } x \in [0, +\infty). \end{cases}$

8. Există funcții discontinue în orice punct $x \in \mathbb{R}$, astfel încît suma şi respectiv produsul lor să fie funcții continue pe $\mathbb{R}$? Să se exemplifice.

9. Să se dea exemplu de o funcție discontinuă pe un interval I şi de o funcție continuă neidentic nulă pe acest interval, astfel încît produsul lor să fie o funcție continuă pe I.

§3 Proprietăți ale funcțiilor continue

Definiție. O funcție $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ se numeşte:

a) **mărginită superior** dacă imaginea sa $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ este o mulțime mărginită superior, adică există $\overline{M} \in \mathbb{R}$, astfel încît $f(x) \le \overline{M}$, $\forall x \in E$.

b) **mărginită inferior** dacă imaginea sa $f(E)$ este o mulțime mărginită inferior, adică există $\overline{m} \in \mathbb{R}$, astfel încît $\overline{m} \le f(x)$, $\forall x \in E$.

c) **mărginită** dacă imaginea sa $f(E)$ este o mulțime mărginită, adică există $\overline{m}, \overline{M} \in \mathbb{R}$, astfel încît $\overline{m} \le f(x) \le \overline{M}$, $\forall x \in E$.

Numerele $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$ şi $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ se numesc respectiv ***marginea superioară*** şi ***marginea inferioară*** ale funcției f.

3.1. Proprietăți de mărginire

În general, o funcție continuă nu este mărginită. De exemplu, funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, nu este mărginită superior, fiind definită pe un interval nemărginit (fig. 3.7 a)). Dar nici funcția continuă $g: \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{tg} x$, nu este mărginită superior, deşi este definită pe un interval mărginit (fig. 3.7 b)).

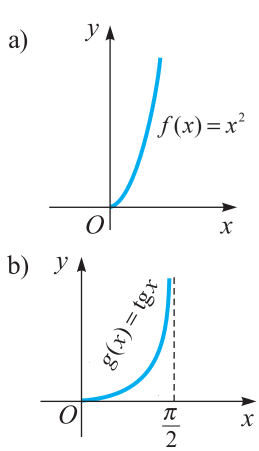


Fig. 3.7

Este adevărat următorul rezultat fundamental din care rezultă că este esențială condiția ca mulțimea E să fie compactă.

Teorema 4 (Weierstrass de mărginire).
Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci:
1) f este mărginită;
2) f îşi atinge marginile, adică există $x_1, x_2 \in [a, b]$, astfel încît $f(x_1) = m$ şi $f(x_2) = M$, unde m şi M sînt respectiv marginea inferioară şi cea superioară ale funcției f:

$$m = \inf_{x \in E} f(x), \quad M = \sup_{x \in E} f(x).$$

Numerele m şi M se numesc ***cea mai mică valoare*** şi respectiv ***cea mai mare valoare*** ale funcţiei f pe $[a, b]$.

Exemple

1. Funcţia $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, este continuă pe $[0, 1]$.

Evident, $m = 1 = f(0)$ şi $M = 2 = f(1)$.

Astfel am verificat direct dacă funcţia f îşi atinge marginile.

Restricţia funcţiei f la intervalul deschis $(0, 1)$ nu îşi atinge marginile pe acest interval (fig. 3.8 a)).

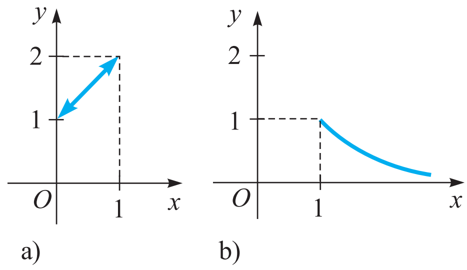


Fig. 3.8

2. Fie $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Atunci $f([1, +\infty)) = (0, 1]$ şi funcţia f nu îşi atinge marginea inferioară $m = 0$ pe intervalul $[1, +\infty)$ (fig. 3.8 b)).

Observaţii. **1.** Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare pe intervalul $[a, b]$, atunci $m = f(a)$ şi $M = f(b)$, adică marginile ei sînt atinse la capetele intervalului $[a, b]$; dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $[a, b]$, atunci $m = f(b)$ şi $M = f(a)$ (fără a mai fi nevoie de ipoteza de continuitate a funcţiei f).

2. Dacă $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare pe (a, b), atunci $m = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $M = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$; dacă f este o funcţie descrescătoare pe (a, b), atunci $m = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$, $M = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

3. În general sînt posibile cazurile: $m = \inf\limits_{x \in E} f = -\infty$, $M = \sup\limits_{x \in E} f = +\infty$.

3.2. Proprietatea lui Darboux

Funcţiile continue definite pe un interval au proprietatea că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare. Altfel spus, dacă o funcţie continuă f ia două valori distincte, atunci f ia toate valorile cuprinse între aceste două valori.

Definiţie. Fie I un interval. Se spune că o funcţie $f: I \to \mathbb{R}$ are **proprietatea lui Darboux**[1] pe intervalul I dacă pentru orice puncte α, β din I, $\alpha < \beta$, şi orice număr λ cuprins între $f(\alpha)$ şi $f(\beta)$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$, există cel puţin un punct $c_\lambda \in (\alpha, \beta)$, astfel încît $f(c_\lambda) = \lambda$.


Jean Gaston Darboux

[1] Jean Gaston Darboux (1842–1917) – matematician francez.

Geometric, aceasta înseamnă că orice valoare „intermediară” λ între $f(\alpha)$ şi $f(\beta)$ de pe axa Oy este valoare a funcției în cel puțin un punct „intermediar” c între α şi β de pe axa Ox. În figura 3.9 aceasta se realizează în trei puncte: c_1, c_2 şi c_3.

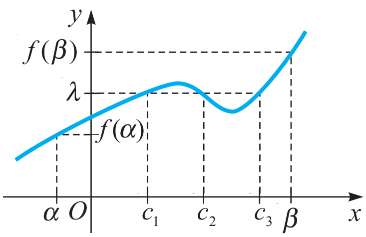


Fig. 3.9

Teorema 5 (teorema I Bolzano–Cauchy despre anularea funcției). Fie funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi la extremitățile acestui interval funcția f ia valori de semne opuse: $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f(c) = 0$.

Demonstrație

Pentru a fixa ideile, să presupunem că $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$ (fig. 3.10). Divizăm $[a, b]$ în două intervale de lungimi egale prin punctul $\frac{a+b}{2}$. Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, atunci teorema este demonstrată şi se poate considera $c = \frac{a+b}{2}$. Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, atunci la capetele unuia dintre intervalele $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ funcția ia valori de semne opuse. Notînd acest interval cu $[a_1, b_1]$, obținem $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

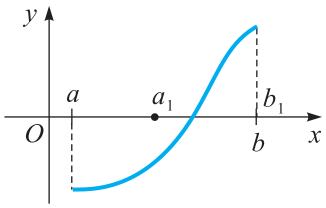


Fig. 3.10

Divizăm $[a_1, b_1]$ în două intervalele de lungimi egale şi omitem cazul în care funcția f se anulează în mijlocul acestuia, fiindcă atunci teorema este demonstrată.

Notăm cu $[a_2, b_2]$ acea jumătate a intervalului $[a_1, b_1]$ pentru care $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$.

Repetăm înjumătățirea intervalului şi raționamentele anterioare. Dacă după un număr finit de paşi găsim un punct în care funcția f se anulează, atunci teorema este demonstrată. Fie nu găsim un astfel de punct la nici un pas. În acest caz obținem un şir descrescător de intervale incluse $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ care verifică relațiile:

$$f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0 \quad \text{şi} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sînt monotone şi mărginite (deoarece $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$, $b \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots$) şi $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Aplicînd teorema lui Weierstrass (modulul 1, secvența 3.1), obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, $c \in [a, b]$. Trecînd la limită în inegalitățile $f(a_n) < 0$ şi $f(b_n) > 0$ şi ținînd cont de continuitatea funcției f în punctul c, obținem că $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ şi $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$. În concluzie, $f(c) = 0$. ►

Teorema 5 poate fi reformulată astfel:

Teorema 5′ (teorema I Bolzano–Cauchy despre anularea funcției). Dacă o funcție f este continuă pe un interval I şi ia valori de semne opuse în punctele $a, b \in I$, atunci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul (a, b).

Teorema 6 (teorema II Bolzano–Cauchy despre valorile intermediare). Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acest interval.

Demonstrație

Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, $\alpha, \beta \in I, \alpha < \beta$, λ – un număr cuprins între valorile $f(\alpha)$ şi $f(\beta)$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Considerăm funcția $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - \lambda$. Funcția φ este continuă pe I şi $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) = (f(\alpha)-\lambda)(f(\beta)-\lambda) < 0$. În baza teoremei 5′, există cel puțin un punct $c_\lambda \in (\alpha, \beta) \subset I$, astfel încît $\varphi(c_\lambda) = 0$, adică $f(c_\lambda) = \lambda$. ▶

Corolar. Fie $I \subset \mathbb{R}$, unde I este un interval, şi $f\colon I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe I. Mulțimea $J = f(I)$ este de asemenea un interval.

Observații. **1.** Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Dacă funcția f îşi atinge marginile $m = \inf\limits_{x \in I} f(x)$ şi $M = \sup\limits_{x \in I} f(x)$, atunci $f(I) = [m, M]$, iar dacă nici una dintre marginile funcției f nu este atinsă, atunci $f(I) = (m, M)$ (aici nu sînt excluse cazurile $m = -\infty$, $M = +\infty$).

De exemplu, pentru funcția $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{1-x}$, obținem $m = -\infty$ şi $M = +\infty$. Deci, $f\big((0,1)\big) = (-\infty, +\infty)$.

2. Dacă $I = (a, b)$ este un interval deschis şi funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci despre tipul intervalului $J = f(I)$ nu se poate afirma nimic concret. Acest interval J poate fi închis, deschis, semideschis, mărginit sau chiar nemărginit.

De exemplu, pentru funcția $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, avem $f((0, +\infty)) = (0, 1)$, iar pentru funcția $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$, obținem $f((0,1)) = \left(0, \dfrac{1}{4}\right]$.

3.3. Aplicații ale proprietăților funcțiilor continue la rezolvarea unor ecuații şi inecuații

Conform teoremei 5′, dacă $f\colon I \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a, b] \in I$ şi $f(a)\cdot f(b) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție $c \in (a, b)$. Dacă, în plus, funcția f este strict monotonă pe $[a, b]$, atunci soluția c este unică pe $[a, b]$.

Exemplu

Considerăm funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + 3x$. Să se demonstreze că pe intervalul $[-1, 0]$ ecuația $f(x) = 0$ are exact o soluție.

Rezolvare:

Funcția f este continuă şi strict crescătoare pe intervalul $[-1, 0]$ ca sumă de două funcții crescătoare. În plus, $f(-1)\cdot f(0)=\left(\frac{1}{e^2}-3\right)\cdot 1<0.$ Prin urmare, există un unic $c\in(-1, 0),$ încît $f(x)=0.$

Dacă $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ este o funcție continuă pe intervalul I şi dacă f nu se anulează în nici un punct $x\in I$ (adică ecuația $f(x)=0$ nu are soluții în I), atunci funcția f are în mod necesar un semn constant pe I, adică $f(x)>0$ sau $f(x)<0$ pe acest interval.

Într-adevăr, în caz contrar ar exista puncte x_1, x_2 din I, $x_1<x_2$, astfel încît $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, şi atunci funcția f s-ar anula într-un punct $c\in(x_1, x_2)$ care aparține intervalului I, ceea ce este în contradicție cu ipoteza.

În general, a stabili semnul unei funcții f pe un interval înseamnă a rezolva inecuația de tipul $f(x)>0$ (sau $f(x)<0$) şi a indica mulțimile pe care funcția f ia valori pozitive (sau negative).

Semnul unor funcții elementare poate fi stabilit aplicînd *metoda intervalelor*. Să presupunem că $x_1<x_2<\ldots<x_n\ldots$ sînt *toate* zerourile unei funcții continue $f\colon I\to\mathbb{R}$, adică $f(x_k)=0,$ $k\in\mathbb{N}^*$ (ele pot fi un număr infinit). Atunci pe fiecare dintre intervalele $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n), \ldots$ funcția f are semn constant. Pentru a determina acest semn, este suficient ca pe fiecare dintre aceste intervale să alegem cîte un punct şi să determinăm semnul funcției f în acest punct.

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că orice funcție polinomială de grad impar are cel puțin un zerou pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare:

Fie funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ $f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_{2n+1},$ şi presupunem că $a_0>0.$ Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$ rezultă că există $x_1,$ astfel încît $f(x_1)<0.$

Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$ rezultă că există $x_2, x_2>x_1,$ astfel încît $f(x_2)>0.$ Aşadar, funcția f se anulează între punctele x_1 şi x_2, deci există cel puțin un punct $c\in(x_1, x_2),$ astfel încît $f(c)=0.$

2. Să se arate că funcția definită prin $f(x)=x^5+7x^3+7$ are un zerou unic pe $[-1, 0]$.

Rezolvare:

Funcția f este continuă şi strict crescătoare pe $[-1, 0]$ ca sumă a două funcții strict crescătoare (definite prin expresiile x^5 şi $7x^3+7$) pe $[-1, 0]$. Cum $f(-1)=-1,$ $f(0)=1,$ rezultă că $f(-1)\cdot f(0)<0.$ Prin urmare, în intervalul $[-1, 0]$ ecuația $f(x)=0$ are o soluție şi aceasta este unică, deoarece funcția dată este strict crescătoare.

3. Să se arate că ecuația $\ln x+x=0$ are o soluție unică $x_0\in\left(\frac{1}{e}, 1\right).$

Rezolvare:

Fie funcția $f\colon\left[\frac{1}{e}, 1\right]\to\mathbb{R},$ $f(x)=\ln x+x.$ Funcția f, fiind continuă pe $\left[\frac{1}{e}, 1\right],$ are proprietatea lui Darboux pe acest interval şi, cum $f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=-1+\frac{1}{e}<0$ şi

$f(1)=\ln 1+1=1>0$, rezultă că există $x_0\in\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$, astfel încît $f(x_0)=0$. Soluția x_0 este unică, deoarece funcția $g\colon (0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln x+x$, este strict crescătoare, ca sumă a două funcții strict crescătoare.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $(x^2-9)\ln x>0$.

Rezolvare:

Zerourile funcției $f\colon (0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)\ln x$, sînt 1 și 3. Funcția f, fiind continuă pe $(0,\ +\infty)$, are semn constant pe fiecare dintre intervalele $(0,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ +\infty)$. Alegem $\xi_1=\frac{1}{2}\in(0,\ 1)$, $\xi_2=2\in(1,3)$, $\xi_3=4\in(3,+\infty)$ și obținem:

$$f(\xi_1)=\left(\frac{1}{4}-9\right)\ln\frac{1}{2}>0,\quad f(\xi_2)=(4-9)\ln 2<0,\quad f(\xi_3)=(16-9)\ln 4>0.$$

Răspuns: $S=(0,\ 1)\cup(3,\ +\infty)$.

Exerciții propuse

B

1. Fie funcția $f\colon I\to\mathbb{R}$ continuă pe intervalul I. Să se demonstreze că funcțiile

$$f_+\colon I\to\mathbb{R},\ f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x)>0\\ 0, & \text{dacă } f(x)\le 0,\end{cases}\quad \text{și}\quad f_-\colon I\to\mathbb{R},\ f_-(x)=\begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x)<0\\ 0, & \text{dacă } f(x)\ge 0,\end{cases}$$

sînt continue pe I. Să se traseze graficele funcțiilor f_+ și f_-, știind că $I=\mathbb{R}$ și:

a) $f(x)=x$; b) $f(x)=\sin x$; c) $f(x)=1+x^2$; d) $f(x)=-e^x$.

2. Să se arate că dacă $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ ((a,b) – interval finit sau infinit) este o funcție continuă și există $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\beta$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci funcția f este mărginită pe (a,b).

3. Să se arate că funcția continuă $f\colon (0,\ 2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$, este mărginită pe $(0,\ 2)$, însă nu își atinge marginile pe $(0,\ 2)$, iar funcția discontinuă $g\colon (0,2)\to\mathbb{R}$, $g(x)=[x]$, își atinge marginile pe acest interval. Să se traseze graficele acestor funcții.

4. Să se construiască o funcție $f\colon (a,\ b)\to\mathbb{R}$ continuă și nemărginită pe $(a,\ b)$.

5. Fie funcția $f\colon [0,\ 1]\to\mathbb{R}$:

1) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } 0\le x\le\frac{1}{2}\\ x-\frac{1}{2}, & \text{dacă } \frac{1}{2}<x\le 1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0\le x\le\frac{1}{2}\\ \frac{x}{3}, & \text{dacă } \frac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$

a) Să se arate că funcția f este discontinuă în punctul $x=\frac{1}{2}$.

b) Să se traseze graficul funcției f.

c) Să se arate că funcția f își atinge marginile și că mulțimea valorilor ei este un interval închis.

6. Să se demonstreze că funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{dacă } x<0\\ \pi, & \text{dacă } x=0\\ 1, & \text{dacă } x>0;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{dacă } x\ne 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x=0,\end{cases}$

este discontinuă și la dreapta, și la stînga în punctul $x=0$. Să se traseze graficul funcției f.

7. Să se dea exemplu de o funcție $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ continuă pentru care mulțimea valorilor ei este:
a) un interval închis; b) un interval deschis; c) un interval semideschis.

8. Să se demonstreze că funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux:
a) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } x<0 \\ 1+x, \text{ dacă } x\ge 0; \end{cases}$ b) $f(x)=[x]-x;$ c) $f(x)=\operatorname{sgn} x.$

9. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $(|x|-3)(\ln x+4)<0;$ b) $(x^2+3x-4)(2^x-2)<0;$ c) $(x^3+2x^2-4x+1)(\lg x-10)>0.$

10. Să se studieze semnul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=x(x-a)(x-b)(x-c),$ unde a, b, c sînt constante și $0<a<b<c;$
b) $f(x)=(x-1)(x^2+3x-4)(e^{x+4}-1).$

11. Funcția $f\colon [-1, 1]\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2}{x},$ este continuă și are proprietatea că $f(-1)\cdot f(1)<0$ și totuși ecuația $f(x)=0$ nu are soluții. Cum se explică?

Exerciții și probleme recapitulative

B

1. Să se determine valorile parametrului $\alpha\in\mathbb{R},$ astfel încît funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-2\alpha x+\alpha^2}, \text{ dacă } x\ge 1 \\ \alpha x+3, \text{ dacă } x<1, \end{cases}$ să fie continuă în punctul $x_0=1.$

2. Să se afle punctele de discontinuitate și tipul lor pentru funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=\begin{cases} 2x+3, \text{ dacă } x\le 1 \\ x-1, \text{ dacă } x>1; \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, \text{ dacă } x\ne 1 \\ 1, \text{ dacă } x=1; \end{cases}$
c) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}+x^3}{x^{2n}+1};$ d) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}, \text{ dacă } x\ge 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n, \text{ dacă } x<0. \end{cases}$

3. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} ae^x, \text{ dacă } x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{b}}{x}, \text{ dacă } x>0. \end{cases}$

Să se determine $a,\ b\in\mathbb{R},\ b>0,$ știind că f este continuă pe $\mathbb{R}.$

4. Fie funcțiile $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue și $f(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{Q}.$
Să se demonstreze că $f(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$

5. Fie funcțiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} -1, \text{ dacă } x<0 \\ 0, \text{ dacă } x=0 \\ 1, \text{ dacă } x>0; \end{cases}$ $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x)=x^2-2x+1.$

a) Să se identifice punctele de discontinuitate ale funcțiilor f și g.
b) Să se determine funcțiile compuse $f\circ g$ și $g\circ f$.
c) Să se studieze continuitatea funcțiilor $f\circ g$ și $g\circ f$.
d) Să se traseze graficele funcțiilor $f, g, f\circ g$ și $g\circ f$.

6. Să se precizeze dacă este mărginită funcția: $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{2x^2+1}$; b) $f(x) = \sin x^2$; c) $f(x) = x + \sin x$; d) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

7. Funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, are proprietatea că $f(-2) \cdot f(2) < 0$ şi totuşi ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții. Cum se explică?

8. Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are soluții pe intervalul indicat pentru funcția:

a) $f(x) = -x^3 + 8x + 30$, $\mathbb{R}$; b) $f(x) = x^4 - 3x + 1$, $[0, 1]$; c) $f(x) = (x-2)\sin \pi x$, $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

9. Să se rezolve inecuația:

a) $x^4 - 9x^2 > 0$; b) $(x^2 - 16)\ln x < 0$; c) $(|x| - 1)(\ln x + 2) > 0$.

Probă de evaluare

B

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

1. Fie intervalul $I = [a, b]$ şi funcția $f: I \to \mathbb{R}$. Care dintre următoarele cazuri pot avea loc? ③

a) f este continuă, mărginită şi îşi atinge marginile.
b) f este continuă şi nemărginită.
c) f este discontinuă şi îşi atinge marginile.
d) f este discontinuă şi nu-şi atinge marginile.
e) f este discontinuă, $f(a) \cdot f(b) < 0$, însă ecuația $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, nu are soluții.
f) f este continuă, $f(a) \cdot f(b) > 0$ şi ecuația $f(x) = 0$ are soluții.

Argumentați răspunsul apelînd la proprietățile funcțiilor continue sau prin exemple.

2. Studiați continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: ③

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{2x}, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x \geq 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \\ 2^x - 2, & \text{dacă } x \in [1, 2] \\ x, & \text{dacă } x \in (2, +\infty). \end{cases}$

3. Stabiliți dacă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este mărginită: ②

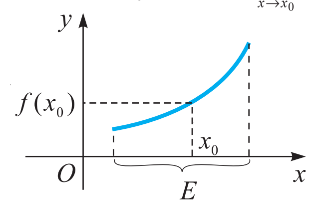
a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0, \ a \in \mathbb{R}; \end{cases}$ b) $f(x) = x \cdot \sin^2 x$.

4. Determinați $a \in \mathbb{R}$, astfel încît funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, a] \\ 3x - 1, & \text{dacă } x \in (a, +\infty), \end{cases}$ să fie continuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$. ②

Funcții continue

Definiția continuității

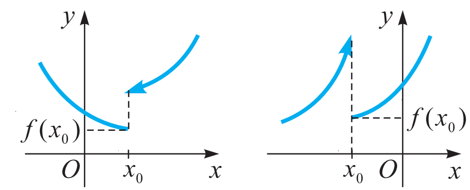
Funcția $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ se numește **continuă în punctul $x_0 \in E$** dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



Funcția $f: E \to \mathbb{R}$ se numește **continuă pe E** dacă ea este continuă în orice punct $x \in E$.

Continuitatea la stînga (dreapta)

Funcția $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ se numește **continuă la stînga (dreapta) în punctul $x_0 \in E$** dacă există limita ei la stînga (dreapta) în x_0 și $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ $(f(x_0 + 0) = f(x_0))$.



Criterii de continuitate

Funcția $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ este continuă în punctul $x_0 \in E$ dacă este adevărată una din ***propozițiile***:

1. $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$.
2. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît pentru orice $x \in E$ din $|x - x_0| < \delta$ rezultă că $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Cauchy).
3. Pentru orice șir $(x_n)_{n \ge 1}$, $x_n \in E$, din $x_n \to x_0$ rezultă că $f(x_n) \to f(x_0)$ cînd $n \to \infty$.
4. Fie funcția f monotonă pe un interval I. Funcția f este continuă pe I dacă și numai dacă mulțimea valorilor ei, $\{f(x)\}$, este un interval.

Clase de funcții continue

1. Fie f și g funcții continue. Atunci αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ sînt funcții continue.
2. Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.
3. Orice funcție elementară este continuă pe tot domeniul ei de definiție.

Proprietăți ale funcțiilor continue

1. ***Teorema (Weierstrass de mărginire).*** Orice funcție continuă pe un interval închis este mărginită și își atinge marginile pe acest interval.

2. ***Teorema Bolzano–Cauchy despre anularea funcției.*** Fie funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f(c) = 0$.

3. Corolar al ***teoremei Bolzano–Cauchy despre valorile intermediare.*** Mulțimea valorilor unei funcții continue pe un interval reprezintă un interval.

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Dacă funcția f nu este continuă în punctul $x_0 \in E$, atunci x_0 se numește **punct de discontinuitate** al acestei funcții.

Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța întîi** pentru funcția f dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sînt finite, însă

$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ sau

$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

Diferența $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se numește **saltul funcției în punctul** x_0.

Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța a doua** dacă cel puțin una dintre limitele laterale $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ este infinită sau nu există.

Modulul

4 Funcții derivabile

Obiective

- utilizarea corectă în diverse contexte, inclusiv în comunicare, a terminologiei aferente noțiunilor *derivata funcției* şi **diferențiala funcției*;
- aplicarea definiției derivatei la calculul derivatelor unor funcții elementare; utilizarea în diferite contexte a formulelor obținute;
- aplicarea regulilor de derivare şi a formulelor derivatelor la rezolvarea problemelor;
- *calculul diferențialelor unor funcții elementare şi utilizarea formulelor respective în multiple contexte;
- utilizarea proprietăților funcțiilor derivabile la rezolvarea problemelor;
- conceperea metodelor calculului diferențial ca metode noi de rezolvare a unor probleme teoretice şi practice.


I. Newton

Probleme diverse de matematică (studiul variației funcției şi trasarea graficului ei, probleme de maxim şi minim etc.), de fizică (viteza şi accelerația unui mobil, intensitatea curentului electric, densitatea liniară de masă a unei bare metalice etc.), de economie (costurile şi beneficiile), probleme de calcul aproximativ, precum şi altele, în care prezintă interes rata vreunei schimbări, se rezolvă prin aplicarea directă a noțiunii *derivata funcției*, care este unul dintre conceptele fundamentale ale *analizei matematice*. Istoria atribuie în egală măsură acest concept savanților I. Newton[1] şi G.W. Leibniz[2].


G. W. Leibniz

Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor poartă denumirea de *calcul diferențial*. Obiectul calculului diferențial îl constituie funcțiile, iar *derivata* unei funcții reprezintă măsura în care funcția reacționează la schimbarea argumentului.

[1] Isaac Newton (1642–1727) – fizician, matematician şi astronom englez.
[2] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) – filozof şi matematician german.

§1 Noțiunea de derivată

Noțiunea *derivata funcției* este bazată pe noțiunile *creşterea argumentului* şi *creşterea funcției*.

1.1. Creşterea argumentului şi creşterea funcției

Fie funcția $f: I \to \mathbb{R}$, unde intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi x un punct arbitrar dintr-o vecinătate oarecare a punctului x_0.

Definiție. Diferența $x - x_0$ se numeşte **creşterea argumentului** x în punctul x_0.

Se notează: $x - x_0 = \Delta x$.

Definiție. Diferența $f(x) - f(x_0)$ se numeşte **creşterea funcției f în punctul** x_0 corespunzătoare creşterii argumentului cu Δx.

Se notează: $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Din $x - x_0 = \Delta x$ rezultă că $x = x_0 + \Delta x$.

Atunci $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Exercițiu rezolvat

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Să se calculeze Δx şi Δf, dacă $x_0 = 1$ şi:

a) $x = 1{,}5$; b) $x = 0{,}9$.

Rezolvare:

a) $\Delta x = x - x_0 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$;

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1{,}5) - f(1) = 2 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 1 = 1$;

b) $\Delta x = x - x_0 = 0{,}9 - 1 = -0{,}1$;

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = 2 \cdot 0{,}9 - 2 \cdot 1 = -0{,}2$.

Observație. Atît creşterile argumentului, cît şi creşterile funcției pot fi pozitive, negative sau nule.

Interpretarea geometrică a creşterilor Δx şi $\Delta f(x_0)$ este reprezentată în figura 4.1.

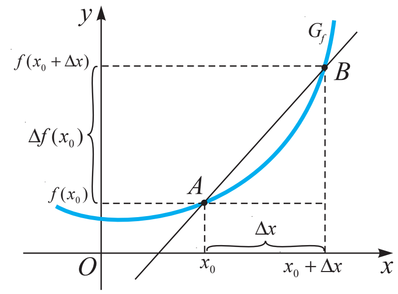


Fig. 4.1

1.2. Probleme care au condus la noțiunea de derivată

Două probleme clasice, una de geometrie (despre tangenta la o curbă plană) şi alta de fizică (despre viteza instantanee a unui mobil), au condus la noțiunea de derivată. Aceste probleme au fost cercetate şi rezolvate de G.W. Leibniz şi respectiv de I. Newton.

1.2.1. *Tangenta la graficul unei funcții (la o curbă plană)*

Fie I un interval deschis şi $f\colon I \to \mathbb{R}$ funcție continuă.

Observație. Funcția este continuă pe un interval dacă graficul acesteia poate fi trasat pe acest interval fără a ridica creionul de pe hîrtie.

Graficul $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ al funcției f este o curbă de ecuație $y = f(x)$ (fig. 4.2). Fie $x_0 \in I$, punctele $A(x_0, f(x_0)) \in G_f$, $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \in G_f$ şi dreapta AB – o secantă (față de graficul G_f) ce formează cu axa Ox unghiul β. Cînd pe curba G_f punctul B se apropie de punctul A, adică atunci cînd $\Delta x \to 0$, secanta AB ocupă poziții diferite (AB_1, AB_2, ..., AT).

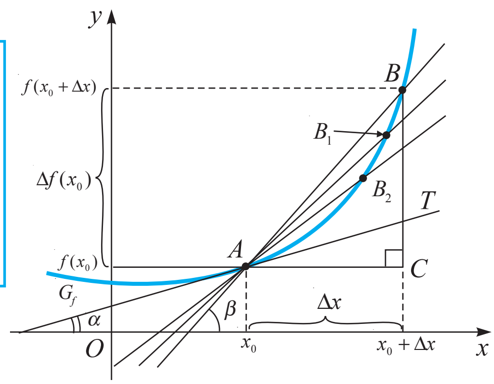


Fig. 4.2

Spunem că dreapta AT este **tangentă** la graficul funcției f în punctul $A(x_0, f(x_0))$ dacă această dreaptă coincide cu poziția limită (în cazul în care o astfel de poziție există) a secantei AB cînd $\Delta x \to 0$ (fig. 4.2).

Tangenta la graficul funcției f în punctul dat $A(x_0, f(x_0))$ poate fi determinată dacă este cunoscută panta ei.

Reamintim!

Panta m (sau ***coeficientul unghiular*** m) a dreptei de ecuație $y = mx + b$ este egală cu tangenta unghiului pe care îl formează această dreaptă cu direcția pozitivă a axei Ox.

Cum $m(\angle C) = 90°$ (fig. 4.2), din ΔACB obținem coeficientul unghiular $m(\Delta x)$ al secantei AB:

$$m(\Delta x) = \operatorname{tg}\beta(\Delta x) = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Trecerea la limită în formula (1), cînd $\Delta x \to 0$, conduce la studiul limitei:

$$\lim_{\Delta x \to 0} m(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Valoarea finită a acestei limite (dacă limita există) este coeficientul unghiular al dreptei tangente la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$. Deci,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = m. \qquad (2)$$

Aşadar, problema existenței tangentei la graficul funcției f într-un punct dat $A(x_0, f(x_0))$ este în corelație cu problema existenței limitei (2).

1.2.2. Viteza instantanee a unui mobil

Fie un mobil se mişcă în sensul pozitiv pe o axă l conform legii $s = s(t)$, unde $s(t)$ este abscisa punctului în care se află mobilul în momentul t. Altfel spus, abscisa este *distanța* parcursă (*spațiul* parcurs) de mobil în timpul t (fig. 4.3).

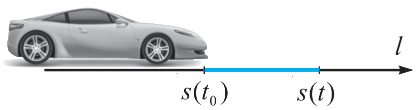


Fig. 4.3

Dacă mişcarea mobilului este uniformă, atunci pentru orice momente t_0, t_1 $(t_1 \neq t_0)$ valoarea raportului $\dfrac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}$ este constantă şi este egală cu viteza mobilului.

Dacă însă mişcarea mobilului nu este uniformă, viteza lui nu este constantă. Să considerăm un moment t_0 de referință. Pentru intervalul de timp $[t_0, t]$ raportul dintre distanța parcursă şi timpul scurs, $\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ (3), se numeşte ***viteza medie*** a mobilului.

Mişcări uniforme practic nu există, dar pe intervale de timp din ce în ce mai mici, mişcarea mobilului tinde să devină uniformă. În aceste condiții, pentru $t \to t_0$, $t \neq t_0$, viteza medie respectivă tinde la un număr, care în fizică se numeşte ***viteza instantanee a mobilului în momentul t_0***.

Aşadar, definim viteza instantanee $v(t_0)$ a mobilului în momentul t_0 ca fiind limita (dacă aceasta există) la care tinde raportul (3) cînd $t \to t_0$, adică

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{4}$$

În mod similar, dacă $v(t)$ este viteza instantanee a mobilului în orice moment t, atunci ***accelerația instantanee*** $a(t_0)$ ***a mobilului în momentul*** $\boldsymbol{t_0}$ se defineşte ca fiind limita (dacă aceasta există) la care tinde raportul $\dfrac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ cînd $t \to t_0$, adică

$$a(t_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{5}$$

Exemplele prezentate demonstrează importanța studierii limitei raportului dintre creşterea funcției şi creşterea argumentului cînd creşterea argumentului tinde la zero, deci a limitei

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{6}$$

1.3. Noțiunea de derivată a unei funcții într-un punct

Să formulăm cîteva definiții importante.

Definiție. Fie intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi funcția $f: I \to \mathbb{R}$. Se spune că funcția f **are derivată în punctul** $\boldsymbol{x_0}$ dacă există limita $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Această limită se numeşte ***derivata funcției f în punctul*** $\boldsymbol{x_0}$ şi se notează $f'(x_0)$.

Dacă, în plus, limita este finită, funcţia f se numeşte ***derivabilă în punctul*** x_0.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{sau} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{7}$$

Notaţia $f'(x_0)$ se citeşte: *ef prim în punctul* x_0.

Observaţii. **1.** În cazul în care limita (7) este infinită sau nu există, funcţia f ***nu este derivabilă în punctul*** x_0.

2. În studiul derivabilităţii unei funcţii într-un punct intervin doar valorile funcţiei respective într-o vecinătate a acestui punct. Din aceste motive se mai spune că ***derivabilitatea funcţiei***, similar cu limita şi *continuitatea funcţiei, ***este o proprietate locală a acesteia***.

3. În continuare vom studia derivata funcţiei pe un interval deschis I (dacă nu se specifică altceva).

Atenţie! **1.** Revenind la exemplele din fizică (formulele (4) şi (5)), deducem:

a) $v(t_0)=s'(t_0)$ – viteza instantanee a unui mobil în momentul t_0 este valoarea derivatei distanţei (spaţiului) în t_0;

b) $a(t_0)=v'(t_0)$ – acceleraţia instantanee a unui mobil în momentul t_0 este valoarea derivatei vitezei în t_0.

2. Formulele $v(t)=s'(t)$ şi $a(t)=v'(t)$ exprimă sensul fizic (mecanic) al derivatei: *derivata distanţei* ***s*** *în raport cu timpul* ***t*** *este viteza* ***v*** *a mişcării unui mobil, iar derivata vitezei* ***v*** *în raport cu timpul* ***t*** *este acceleraţia* ***a*** *a aceluiaşi mobil.*

Definiţii. • Se spune că funcţia $f: I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ **este derivabilă pe mulţimea *M*** $(M\subseteq I)$ dacă ea este derivabilă în orice punct din M.

• În acest caz, funcţia $f': M\to\mathbb{R}$, care asociază fiecărui punct $x\in M$ numărul real $f'(x)$, se numeşte **derivata funcţiei *f* pe mulţimea *M***.

• Operaţia prin care din f se obţine f' se numeşte **derivare**.

Observaţie. Derivata funcţiei f se notează: $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}(f), y', f'$, unde $y=f(x)$.

Exerciţiu rezolvat

Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze derivata ei, dacă:

a) $f(x)=2x$; b) $f(x)=x^2$.

Rezolvare:

a) Funcţia f definită prin formula $f(x)=2x$ este derivabilă în orice punct din $\mathbb{R}$, deoarece limita $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x_0+\Delta x)-2x_0}{\Delta x}=2$ există pentru orice $x_0\in\mathbb{R}$. Deci, $f'(x)=(2x)'=2$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Funcția f definită prin formula $f(x)=x^2$ este derivabilă în orice punct din $\mathbb{R}$, deoarece limita $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$ există pentru orice $x_0\in\mathbb{R}$. Deci, $(x^2)'=2x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Din definiția derivatei rezultă următorul *algoritm de calcul al derivatei unei funcții* $f\colon I\to\mathbb{R}$ *într-un punct* și *pe o mulțime*:

① Se ia o creştere arbitrară Δx a argumentului x în punctul x_0, astfel încît $x_0+\Delta x\in I$.

② Se determină creşterea funcției f în punctul x_0: $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

③ Se alcătuieşte raportul $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

④ Se calculează limita acestui raport: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

⑤ Se trage concluzia referitoare la derivabilitatea funcției f în punctul x_0.

⑥ Se studiază derivabilitatea funcției f pe intervalul I.

Definiție. Fie funcția $f\colon I\to\mathbb{R}$. Mulțimea punctelor în care funcția f este derivabilă se numeşte **domeniul de derivabilitate al funcției f**.

Se notează: $D_{f'}$. Evident, $D_{f'}\subseteq I$.

Observație. În continuare, în cazul în care nu este indicat domeniul de definiție al funcției f, se va considera că această funcție este definită pe domeniul ei maxim de definiție.

1.4. Derivabilitate şi continuitate

O condiție necesară de existență a derivatei unei funcții într-un punct este formulată în

Teorema 1. Dacă o funcție este derivabilă într-un punct, atunci ea este continuă în acest punct.

Demonstrație

Fie $f\colon D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$ un punct în care funcția f este derivabilă, adică există şi este finită limita (6). Din relația $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x$, $\Delta x\neq 0$, $x\in D$, rezultă că $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$

Deci, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$, adică $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, de unde rezultă că funcția f este continuă în x_0. ►

Reciproca acestei teoreme este falsă. De exemplu, funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$, este continuă în punctul $x_0=0$, dar nu este derivabilă în acest punct (fig. 4.4).

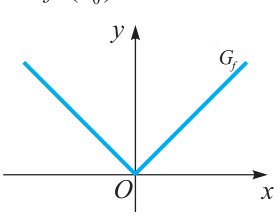


Fig. 4.4

Pentru a demonstra această propoziție, vom calcula limita raportului $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}$ în punctul $x_0=0$. Calculăm limitele laterale ale funcției f în x_0: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{-x}{x}=-1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{x}{x}=1$.

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{|x|}{x}$, rezultă că limita raportului $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ în punctul $x_0=0$ nu există. Deci, funcția f, continuă în $x_0=0$, nu este derivabilă în acest punct.

1.5. Derivate laterale

În anumite situații vom studia limitele laterale ale raportului $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Definiție. Fie $f\colon I\to\mathbb{R}$ (I – interval deschis) şi $x_0\in I$. Limita $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (dacă aceasta există), finită sau infinită, se numeşte **derivata la stînga a funcției f în punctul x_0** şi se notează $f_s'(x_0)$.

Rețineți: $f_s'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. (8)

Definiție. Fie $f\colon I\to\mathbb{R}$ (I – interval deschis) şi $x_0\in I$. Limita $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (dacă aceasta există), finită sau infinită, se numeşte **derivata la dreapta a funcției f în punctul x_0** şi se notează $f_d'(x_0)$.

Rețineți: $f_d'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. (9)

Definiție. Funcția $f\colon I\to\mathbb{R}$ se numeşte **derivabilă la stînga** (respectiv **derivabilă la dreapta**) **în punctul** $x_0\in I$ dacă limita (8) (respectiv limita (9)) există şi este finită.

Astfel, revenind la exemplul precedent, conchidem că funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$, este derivabilă la stînga şi la dreapta în punctul $x_0=0$: $f_s'(0)=-1$, $f_d'(0)=1$.

Reamintim că unul dintre criteriile de existență a limitei unei funcții într-un punct constă în egalitatea limitelor ei laterale în acest punct. Un criteriu similar există şi pentru studiul derivabilității unei funcții într-un punct.

Teorema 2. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă ea este derivabilă la stînga şi la dreapta în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$. În acest caz, $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

Demonstrația teoremei 2 rezultă direct din teorema 2, modulul 2, secvența 1.3.

Observație. Fie funcția $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. În punctele a şi b putem vorbi doar despre derivata la dreapta, respectiv la stînga, în aceste puncte. Nu are sens problema derivatei la stînga în a şi nici a derivatei la dreapta în b.

Exemple

1. Pentru funcția $f(x) = |x|$ avem $f'_s(0) = -1$ şi $f'_d(0) = 1$. Cum $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, rezultă că funcția f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

2. Funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2|x-1|}$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$, deoarece derivatele ei laterale există, dar sînt infinite. (Verificați!)

3. Fie funcția $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$ Există $f'_d(0) = 1$, însă nu există $f'_s(1)$, deoarece f nu este nici continuă în $x = 1$.

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze, în punctul $x_0 = \frac{1}{2}$, creşterea argumentului şi creşterea funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, dacă: a) $x = 2$; b) $x = 0{,}7$; c) $x = -\sqrt{3}$; d) $x = -4{,}2$.

2. Să se calculeze derivata funcției:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}$;
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$;
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$;
d) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

3. Să se calculeze, aplicînd definiția derivatei, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(10)$, dacă:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}5x$;
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.

4. Să se traseze dreptele ce trec prin punctul $(1, 3)$ şi au panta:

a) -1 şi $\sqrt{3}$;
b) 1 şi $-\sqrt{3}$;
c) 0 şi $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

În fiecare caz, să se determine ce tip de unghi formează aceste drepte cu direcția pozitivă a axei absciselor.

B

5. Să se studieze derivabilitatea funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = |x - 2|$, în $x_0 = 2$;
b) $f(x) = |x^2 - 4|$, în $x_0 = -2$, $x_1 = 2$;
c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, în $x_0 = 1$.

6. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$ în punctele x_0 și x_1:

a) $f(x) = x + |x|,\ x_0 = 0,\ x_1 = -2;$ b) $f(x) = x - \dfrac{1}{x},\ x_0 = -1,\ x_1 = 1;$

c) $f(x) = \sqrt{2x-1},\ x_0 = 0{,}5,\ x_1 = 1;$ d) $f(x) = 1 - \sqrt{x},\ x_0 = -1,\ x_1 = 0.$

7. Să se studieze, în punctul $x_0 = 0$, continuitatea și derivabilitatea funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = |\sin x|;$ b) $f(x) = |\cos x|;$

c) $f(x) = \dfrac{2}{|x+1|};$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \le 0 \\ 2x^2 + x, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

8. Să se afle:

a) $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încît funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ să fie derivabilă în $x_0 = 0;$

b) $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încît funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^n \cos\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ să fie derivabilă în $x_0 = 0.$

9. Să se afle $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încît funcția $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\ln x, & \text{dacă } 0 < x \le e \\ mx + n, & \text{dacă } x > e, \end{cases}$ să fie derivabilă în orice punct $x \in (0, +\infty)$.

§2 Interpretarea geometrică a derivatei

2.1. Ecuația tangentei la graficul funcției

Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ o funcție derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și G_f graficul ei (fig. 4.5).

Prezentăm, fără demonstrație, două teoreme.

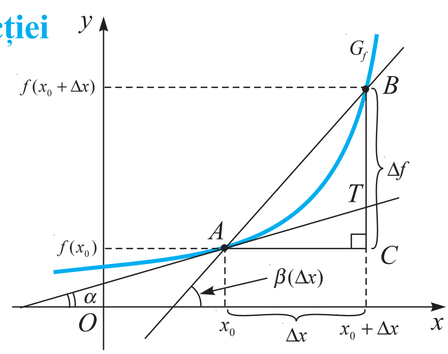


Fig. 4.5

Teorema 3. Dacă funcția f este derivabilă în punctul x_0, atunci la graficul ei în punctul $(x_0, f(x_0))$ poate fi trasată o tangentă neverticală, avînd panta egală cu $f'(x_0)$.

Teorema 4. Dacă la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$ poate fi trasată o tangentă neverticală, atunci funcția f este derivabilă în punctul x_0 și panta m a acestei tangente este egală cu valoarea derivatei funcției f în punctul x_0 $(m = f'(x_0))$.

Sensul geometric al derivatei unei funcții f derivabile într-un punct x_0 rezultă din teoremele 3 și 4: *existența derivatei finite a funcției f în punctul x_0 este echivalentă cu existența tangentei neverticale la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$, astfel încît panta acestei tangente este egală cu $f'(x_0)$.*

Rețineți: Tangenta la graficul funcției f derivabile în punctul x_0 este dreapta ce trece prin punctul $(x_0, f(x_0))$, a cărei pantă m este egală cu $f'(x_0)$, adică $m = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Să determinăm ecuația tangentei în punctul $(x_0, f(x_0))$ al graficului funcției f derivabile în x_0. Știind că ecuația dreptei care are coeficientul unghiular $f'(x_0)$ este $y = f'(x_0)\cdot x + b$, să determinăm coeficientul b. Cum tangenta trece prin punctul $(x_0, f(x_0))$, obținem că $f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b$, de unde $b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$. Astfel, ***tangenta*** în punctul $(x_0, f(x_0))$ al graficului funcției f derivabile în punctul x_0 este ***dreapta de ecuație***

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}\,. \qquad (*)$$

Exerciții rezolvate

1. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, în punctul de abscisă $x_0 = 2$.

Rezolvare:

$f'(x) = (x^2)' = 2x$. Atunci $f'(x_0) = 2\cdot 2 = 4$, iar $f(x_0) = 2^2 = 4$. Substituind în $(*)$, obținem $y = 4 + 4\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$, care este ecuația cerută a tangentei.

Observație. Dacă $f'(x_0) = \infty$ ($f'(x_0) = +\infty$ sau $f'(x_0) = -\infty$), atunci dreapta tangentă în punctul $(x_0, f(x_0))$ al graficului G_f al funcției f continue în punctul x_0 este paralelă cu axa Oy, adică tangenta are ecuația $x = x_0$.

Dacă $f'(x_0) = +\infty$, atunci în vecinătatea punctului $A(x_0, f(x_0))$ graficul G_f are forma reprezentată în figura 4.6:

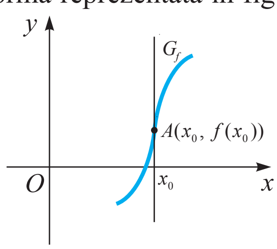


Fig. 4.6

Dacă $f'(x_0) = -\infty$, atunci în vecinătatea punctului $A(x_0, f(x_0))$ graficul G_f are forma reprezentată în figura 4.7:

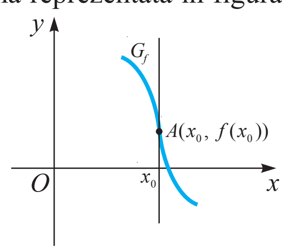


Fig. 4.7

2. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se afle măsura unghiului format de tangenta la graficul G_f în punctul de abscisă x_0 și de direcția pozitivă a axei Ox, dacă:

a) $x_0 = 0$; b) $x_0 = \frac{1}{2}$.

Rezolvare:

Deoarece panta tangentei este $m = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, unde α este măsura unghiului format de tangenta la graficul G_f în punctul de abscisă x_0 și de direcția pozitivă a axei Ox, obținem:

a) $\operatorname{tg}\alpha = f'(0) = 2\cdot 0 = 0$, deci $\alpha = 0$; b) $\operatorname{tg}\alpha = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, deci $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2.2. Interpretarea geometrică a derivatelor laterale (opțional)

Aplicînd derivatele laterale ale unei funcții f într-un punct x_0 şi valorile lor în acest punct, putem determina mai exact forma graficului acestei funcții în vecinătatea punctului x_0. Derivatele laterale ale unei funcții f în punctul x_0, ca şi derivata acesteia, au interpretări geometrice.

Fie funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ continuă, $x_0 \in I$ (I – interval deschis) şi $A(x_0, f(x_0)) \in G_f$. Vom examina unele situații generale referitoare la derivatele laterale şi la derivata funcției f continue în punctul $x_0 \in I$.

I. Fie $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0)$ şi $f_s'(x_0),\ f_d'(x_0),\ f'(x_0) \in \mathbb{R}$. În acest caz, funcția f este derivabilă în x_0 şi graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ tangenta de ecuație $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

II. a) Fie $f_s'(x_0) = -\infty,\ \ f_d'(x_0) = +\infty$. Atunci graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ două semitangente care formează cu axa Ox unghiuri de $-\dfrac{\pi}{2}$ (la stînga) şi $\dfrac{\pi}{2}$ (la dreapta), şi $f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in V(x_0)$ (fig. 4.8 a)).

b) Fie $f_s'(x_0) = +\infty,\ \ f_d'(x_0) = -\infty$. Atunci graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ două semitangente, care formează cu axa Ox unghiuri de $\dfrac{\pi}{2}$ (la stînga) şi $-\dfrac{\pi}{2}$ (la dreapta), şi $f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in V(x_0)$ (fig. 4.8 b)).

În cazul în care derivatele laterale $f_s'(x_0),\ f_d'(x_0)$ sînt infinite şi $f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)$, punctul $A(x_0, f(x_0))$ este numit ***punct de întoarcere*** pentru graficul G_f (fig. 4.8).

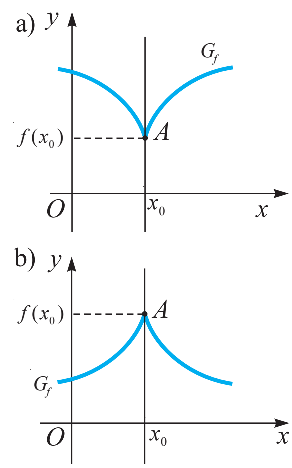


Fig. 4.8

III. a) Fie $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = +\infty$. În acest caz, graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ tangenta de ecuație $x = x_0$ (fig. 4.6);

b) Fie $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = -\infty$. În acest caz, graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ tangenta de ecuație $x = x_0$ (fig. 4.7).

IV. Fie $f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)$ şi cel puțin una dintre aceste derivate laterale este finită. Atunci graficul G_f admite în punctul $A(x_0, f(x_0))$ două semitangente (fig. 4.9):

a) $\begin{cases} f_s'(x_0) \in \mathbb{R} \\ f_d'(x_0) = -\infty \end{cases}$ b) $\begin{cases} f_s'(x_0) = +\infty \\ f_d'(x_0) \in \mathbb{R} \end{cases}$ c) $\begin{cases} f_s'(x_0) \in \mathbb{R} \\ f_d'(x_0) \in \mathbb{R} \\ f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0) \end{cases}$

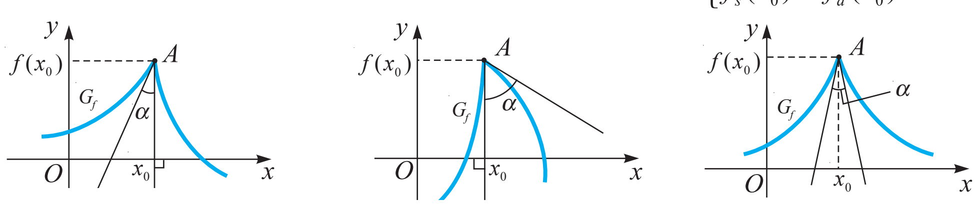


Fig. 4.9

În cazul în care $f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)$ și cel puțin una dintre derivatele laterale este finită, punctul $A(x_0, f(x_0))$ este numit ***punct unghiular*** pentru graficul G_f (fig. 4.9).

Observație. Cele două semitangente, la stînga și la dreapta, într-un punct de întoarcere pentru graficul funcției f formează un unghi nul (fig. 4.8), iar într-un punct unghiular – un unghi $\alpha \in (0, \pi)$ (fig. 4.9).

Exercițiu. Cercetați și reprezentați geometric celelalte situații posibile pentru derivatele laterale ale funcției f într-un punct x_0.

Exerciții rezolvate

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x-1|}$. Să se determine dacă punctul de abscisă $x_0 = 1$ este un punct de întoarcere sau un punct unghiular pentru graficul funcției f.

Rezolvare:

Cum $f_s'(1) = \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{\sqrt{-(x-1)} - 0}{x-1} = -\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{\sqrt{-(x-1)}}{(\sqrt{-(x-1)})^2} = -\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1}{\sqrt{-(x-1)}} = -\infty$ și

$f_d'(1) = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{\sqrt{x-1} - 0}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2} = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$, rezultă că punctul de abscisă $x_0 = 1$ este un punct de întoarcere pentru graficul G_f.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\sin x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^3, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$ Să se determine dacă punctul de abscisă $x_0 = 0$ este un punct de întoarcere sau un punct unghiular pentru graficul G_f și să se scrie ecuațiile semitangentelor la acest grafic în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

Rezolvare:

$$f_s'(0) = \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to -0} \frac{2\sin x - 0}{x - 0} = 2, \quad f_d'(0) = \lim_{x \to +0} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to +0} x^2 = 0.$$

Deoarece $f_s'(0) \neq f_d'(0)$, $f_s'(0)$, $f_d'(0) \in \mathbb{R}$, rezultă că punctul de abscisă $x_0 = 0$ este un punct unghiular pentru graficul G_f.

Ținînd cont de faptul că $f_s'(0) = 2$ și $f_d'(0) = 0$ sînt pantele semitangentelor respective, obținem (fig. 4.10):

1) $y = f(0) + f_s'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0 + 2(x-0)$;
   deci ecuația semitangentei la stînga, în x_0, este $y = 2x$, unde $x \in (-\infty, 0]$;

2) $y = f(0) + f_d'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0 + 0 \cdot (x-0)$;
   deci ecuația semitangentei la dreapta, în x_0, este $y = 0$, unde $x \in [0, +\infty)$.

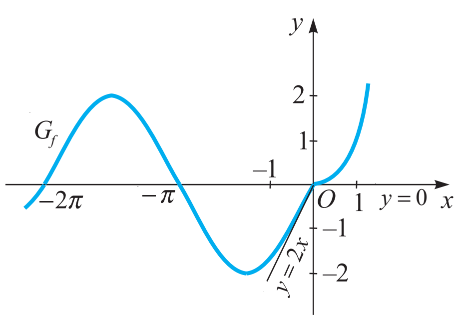
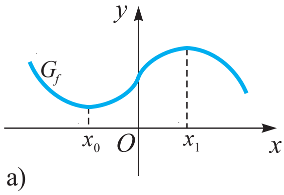


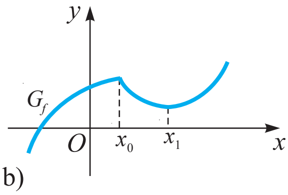
Fig. 4.10

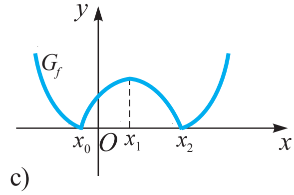
Exerciții propuse

A

1. Să se determine, utilizînd interpretarea geometrică a derivatei, dacă funcția f este derivabilă în punctele de abscise indicate:







2. Să se traseze graficul unei funcții care nu este derivabilă în punctele $x_0 = 3$ şi $x_1 = 5$.

3. Să se scrie, aplicînd definiția derivatei sau formula respectivă, ecuația tangentei la graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în punctul de abscisă x_0:

a) $f(x) = x^3,\ x_0 = 1$; b) $f(x) = 2x^2 - 1,\ x_0 = 0$; c) $f(x) = 2 - x^2,\ x_0 = -2$.

4. Să se afle măsura unghiului format de tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 şi de direcția pozitivă a axei Ox:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3,\ x_0 = 0$; b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2,\ x_0 = 1$.

5. Să se traseze graficul unei funcții, astfel încît tangenta la acest grafic în punctul de abscisă $x_0 = -1$ să fie dreapta de ecuație: a) $y = 0$; b) $y = 2$.

B

6. Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctele specificate şi să se interpreteze geometric rezultatul obținut:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x^2 - 9|,\ x_0 = -3,\ x_1 = 3$;

b) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = |\lg x - 1|,\ x_0 = 10$.

7. Aplicînd definiția derivatei, să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x + 1$, în punctul de abscisă: 1) $x_0 = -0{,}5$, 2) $x_0 = 2$, 3) $x_0 = -5$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$, în punctul de abscisă: 1) $x_0 = \frac{\pi}{4}$, 2) $x_0 = \frac{\pi}{3}$, 3) $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

8. a) Să se determine pentru fiecare dintre funcțiile $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \ge 0 \\ 2x^2 - x, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{dacă } x \ge 0 \\ x^2, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad h(x) = |x^2 - 9|:$$

1) mulțimea punctelor pe care funcția este continuă;

2) mulțimea punctelor pe care funcția este derivabilă.

b) Să se schițeze graficele acestor funcții.

9. Utilizînd definiția derivatei, să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 şi să se afle măsura unghiului format de această tangentă şi de direcția pozitivă a axei Ox:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - x^2$: 1) $x_0 = 0$, 2) $x_0 = 1$;

b) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3}{x} + 1$: 1) $x_0 = -3$, 2) $x_0 = 1$.

10. Să se afle coeficienții $b, c \in \mathbb{R}$, ştiind că în punctul de coordonate $(-1, -2)$ parabola $f(x) = x^2 + bx + c$ are ca tangentă dreapta de ecuație $y = 2x$.

11. Să se dea exemple de funcții derivabile pe un interval:
a) cu excepția unui punct; b) cu excepția a două puncte.

§3 Derivatele unor funcții elementare

Exercițiu. Fie $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\sqrt{x}} \cdot \lg 5x$. Să se calculeze derivata funcției f.

Pentru a calcula derivata funcției f, precum şi derivatele altor funcții, este util să fie cunoscute formulele de calcul al derivatelor funcțiilor elementare.

3.1. Funcția constantă

Teorema 5. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Fie x_0 un punct arbitrar din $\mathbb{R}$. Avem $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c - c}{\Delta x} = 0.$

Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ►

Rețineți: $c' = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Exemplu

Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2014$, obținem $(2014)' = 0$.

Observație. A se face distincție între numerele $f'(x_0)$ şi $(f(x_0))'$, ultimul fiind 0 ca derivata unei funcții constante.

3.2. Funcția identică

Teorema 6. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Fie x_0 un punct arbitrar din $\mathbb{R}$. Avem $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$

Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ►

Rețineți: $x' = 1$. (2)

3.3. Funcția putere cu exponent real

Teorema 7. Fie $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Rețineți: $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\forall x \in (0, +\infty)$. (3)

$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 1$, $\forall x \in [0, +\infty)$. (3′)

Observații. **1.** Pentru $\alpha \geq 1$, funcția $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha}$, este derivabilă şi în $x_0 = 0$.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Aplicînd formula (3), obținem:

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \ \forall x \in (0, +\infty).$$

4. $$(\sqrt[2n+1]{x})' = \frac{1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

5. Funcția definită prin formula $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$ (deoarece derivatele laterale în punctul 0 sînt infinite).

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze:

a) $(x^{-\sqrt{2}})'$; b) $(\sqrt{x})'$; c) $(\sqrt[3]{x})'$.

Rezolvare:

a) $(x^{-\sqrt{2}})' = -\sqrt{2}x^{-\sqrt{2}-1}$;

b) $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$;

c) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Relația $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ are loc şi pentru orice $x \in (-\infty, 0)$.

Rețineți: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$. (4)

Pentru funcția radical $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, obținem:

$$\boxed{(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \ \forall x \in D \setminus \{0\}}. \quad (5)$$

3.4. Funcția sinus

Teorema 8. Fie $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Fie x_0 un punct arbitrar din $\mathbb{R}$. Avem $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0.$$

Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ►

***Rețineți*:** $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (6)

3.5. Funcția cosinus

Teorema 9. Fie $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$. Funcția cosinus este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

***Rețineți*:** $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (7)

Exercițiu. Demonstrați teorema 9.

3.6. Funcția exponențială

Teorema 10. Fie $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

***Rețineți*:** $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (8)

Consecință. Aplicînd formula (8), obținem $(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

***Rețineți*:** $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (8′)

De exemplu: a) $(2^x)' = 2^x \ln 2$; b) $((0{,}3)^x)' = (0{,}3)^x \ln 0{,}3$.

3.7. Funcția logaritmică

Teorema 11. Fie $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Rețineți: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$ (9)

Exercițiu. Demonstrați teorema 11.

Teorema 12. Fie $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f(x) = \log_a x, \; a > 0, \; a \neq 1$. Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, \; a > 0, \; a \neq 1, \; \forall x \in (0, +\infty).$

Rețineți: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, \; a > 0, \; a \neq 1, \; \forall x \in (0, +\infty).$ (10)

Exercițiu. Demonstrați teorema 12.

Indicație. Se va ține cont de definiția derivatei, de formula $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ și de formula (9).

De exemplu: a) $(\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$; b) $(\lg x)' = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze derivata funcției f și să se determine domeniul de derivabilitate $D_{f'}$:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^8$;
b) $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^{-7}$;
c) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \; f(x) = \sqrt[4]{x}$;
d) $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty), \; f(x) = 3^x$;
e) $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty), \; f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;
f) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f(x) = \log_3 x$;
g) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$;
h) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \sqrt[5]{x}$.

2. Să se calculeze valoarea derivatei funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \log_7 x$, în $x_0 = 7$;
b) $f(x) = \lg x$, în $x_0 = \dfrac{1}{10}$;
c) $f(x) = x^2$, în $x_0 = 60$;
d) $f(x) = \sqrt{x}$, în $x_0 = 49$;
e) $f(x) = 2^x$, în $x_0 = 5$;
f) $f(x) = 25$, în $x_0 = -64$.

3. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$ în punctul de abscisă x_0:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \; x_0 = 1$;
b) $f(x) = 2^x, \; x_0 = 0$;
c) $f(x) = \log_8 x, \; x_0 = 2$;
d) $f(x) = x^5, \; x_0 = -1$.

B

4. Să se calculeze derivata funcției f și să se determine domeniul de derivabilitate $D_{f'}$:

a) $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f(x) = x\sqrt{x}$;
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$.

5. Să se calculeze derivata funcției f și să se determine domeniul de derivabilitate $D_{f'}$, dacă $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt[7]{x}$;
b) $f(x) = \sqrt{|x|}$;
c) $f(x) = \log_{0,4}(x^2)$;
d) $f(x) = 2^{|x|}$.

6. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = |\cos x|$, în $x_0 = \frac{\pi}{2}$; b) $f(x) = |2x|$, în $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } x \le 0 \\ -2x, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$ în $x_0 = 0$.

7. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}$ în punctul de abscisă x_0:

a) $f(x) = 7x^2$, $x_0 = -3$; b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

c) $f(x) = \log_{27}(x^3)$, $x_0 = 27$; d) $f(x) = 2{,}5^x$, $x_0 = 1$.

8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + n, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x \ge 0. \end{cases}$ Să se determine valorile parametrilor reali m și n, astfel încît funcția f să fie derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

9. Să se formuleze și să se rezolve exerciții asemănătoare cu ex. **6**, **7**, **8**.

§4 Operații cu funcții derivabile

4.1. Derivata sumei, a produsului și a cîtului

Exercițiu. Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = e^x$, $c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze:

a) $(f+g)'$; b) $(c \cdot f)'$; c) $(f-g)'$;

d) $(f \cdot g)'$; e) $\left(\frac{f}{g}\right)'$; f) $((f \circ g))'$.

Pentru a rezolva acest exercițiu, trebuie să cunoaștem regulile de calcul al derivatelor.

Teorema 13. Dacă funcțiile $f, g: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ sînt derivabile în punctul $x_0 \in I$, atunci funcția $f + g$ este derivabilă în x_0 și

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demonstrație

Avem $(f+g)'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(x_0 + \Delta x) - (f+g)(x_0)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$ ►

Corolar. Dacă funcțiile f și g sînt derivabile pe intervalul I, atunci funcția $f + g$ este derivabilă pe I și $\boxed{(f+g)' = f' + g'}$. (1)

Exemplu

Pentru funcția $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x) = x^3 + e^x$, conform formulei (1), obținem:

$$(x^3 + e^x)' = (x^3)' + (e^x)' = 3x^2 + e^x.$$

Observație. Aplicînd metoda inducției matematice, se poate arăta că suma $f_1+f_2+...+f_n$ a n funcții derivabile pe intervalul I este o funcție derivabilă pe I şi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f'_k. \qquad (1')$$

Exercițiu. Deduceți formula $(1')$.

Teorema 14. Dacă funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi $c \in \mathbb{R}$, atunci funcția $c \cdot f$ este derivabilă în x_0 şi $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Exercițiu. Demonstrați teorema 14.

Corolare. **1.** Dacă funcția f este derivabilă pe intervalul I şi $c \in \mathbb{R}$, atunci funcția $c \cdot f$ este derivabilă pe I şi $\boxed{(c \cdot f)' = c \cdot f'}$. (2)

Exemplu

Pentru funcția $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{3} \cdot e^x$, obținem $(\sqrt{3} \cdot e^x)' = \sqrt{3} \cdot (e^x)' = \sqrt{3}e^x$.

2. Pentru $c = -1$ avem $(-f)' = -f'$.

3. Dacă funcțiile f, g sînt derivabile pe intervalul I, atunci funcția $f - g$ este derivabilă pe I şi $\boxed{(f-g)' = f' - g'}$. (3)

Exemplu

Pentru funcția $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 - e^x$, obținem:

$$(x^3 - e^x)' = (x^3)' - (e^x)' = 3x^2 - e^x.$$

Teorema 15. Dacă funcțiile $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ sînt derivabile în punctul $x_0 \in I$, atunci funcția $f \cdot g\colon I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 şi

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Demonstrație

Fie $x_0 \in I$. Funcția g, fiind derivabilă în x_0, este şi continuă în x_0, adică $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Atunci $(f \cdot g)'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0+\Delta x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}\right) =$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \qquad \blacktriangleright$$

Corolar. Dacă funcțiile f, g sînt derivabile pe intervalul I, atunci funcția $f \cdot g$ este derivabilă pe I şi

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}. \quad (4)$$

Exemplu

Pentru funcția $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 \cdot e^x$, obținem:

$$(x^3 \cdot e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

Observație. Aplicînd metoda inducției matematice, se poate arăta că produsul $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ a n funcții derivabile pe intervalul I este o funcție derivabilă pe I şi

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n'.$$

Teorema 16. Dacă funcțiile $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ sînt derivabile în punctul $x_0 \in I$ şi $g(x_0) \neq 0$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrație

Cum funcția g este continuă şi $g(x_0) \neq 0$, rezultă că există o vecinătate $V(x_0)$ în care $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V(x_0)$. Considerăm Δx, astfel încît $x_0 + \Delta x \in V(x_0)$. Atunci,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) g(x_0) - f(x_0) g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x) g(x_0) \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \frac{1}{g^2(x_0)} \cdot (f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

($\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$, deoarece funcția g este continuă în x_0). ►

***Corolare.* 1.** Dacă funcțiile f, g sînt derivabile pe intervalul I şi $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe I şi $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$. (5)

2. Pentru $f = 1$, aplicînd formula (5), obținem: $\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}}$. (6)

Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze derivata funcţiei $h: D \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x^3}{e^x}$.

Rezolvare:

$$h'(x) = \left(\frac{x^3}{e^x}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot e^x - x^3 \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = \frac{3x^2 e^x - x^3 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2 e^x (3-x)}{e^{2x}} = \frac{x^2(3-x)}{e^x}.$$

4.2. Derivata funcţiilor tangentă, cotangentă

Teorema 17. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x$. Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ şi $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Demonstraţie

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \quad ►$$

Reţineţi: $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$ (7)

Teorema 18. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{ctg} x$. Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ şi $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Reţineţi: $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$ (8)

Exerciţiu. Demonstraţi teorema 18.

4.3. Derivarea funcţiei compuse

Teorema 19. Fie I_1, I_2 intervale şi funcţiile $f: I_1 \to I_2,\ g: I_2 \to \mathbb{R}$. Dacă funcţia f este derivabilă în $x_0 \in I_1$, iar funcţia g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0) \in I_2$, atunci funcţia compusă $h = g \circ f: I_1 \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I_1$ şi $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Reţinem regula de derivare a funcţiei compuse:

$$\boxed{(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x),\ \forall x \in I}. \quad (9)$$

Corolar. Dacă funcțiile $f\colon I_1 \to I_2$, $g\colon I_2 \to I_3$, $h\colon I_3 \to \mathbb{R}$ sînt derivabile, atunci funcția compusă $p(x)\colon I_1 \to \mathbb{R}$, $p(x) = (h \circ g \circ f)(x)$ este derivabilă pe I_1 și

$$\boxed{p'(x) = h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)}. \tag{10}$$

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze derivata funcției:

a) $h\colon D \to \mathbb{R},\ h(x) = 2^{3x}$;

b) $p\colon D \to \mathbb{R},\ p(x) = \log_2 \cos 2x$.

Rezolvare:

a) $(2^{3x})' = 2^{3x}\cdot \ln 2 \cdot (3x)' = \ln 8 \cdot 2^{3x}$.

b) $(\log_2 \cos 2x)' = \log_2'(\cos 2x)\cdot \cos'(2x)\cdot(2x)' = \dfrac{1}{\cos 2x \cdot \ln 2}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 =$

$= -\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x \ln 2} = -\dfrac{2\operatorname{tg} 2x}{\ln 2}$.

4.4. Derivarea funcției inverse

Teorema 20. Fie $f\colon I \to J$ $(I, J \subseteq \mathbb{R})$ o funcție continuă și bijectivă. Dacă funcția f este derivabilă în $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1}\colon J \to I$, unde $J = f(I)$, este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Observație. Fie funcția $f\colon I \to J$ strict monotonă, derivabilă pe intervalul I și $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Prin urmare, funcția inversă $f^{-1}\colon J \to I$ este derivabilă pe intervalul J și

$$\boxed{(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)},\ \forall y \in J,\ \text{unde}\ y = f(x)}. \tag{11}$$

Exerciții rezolvate

1. *Derivata funcției arcsinus*

Fie funcția $f\colon \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

În orice punct $x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ avem $(\sin)'(x_0) = \cos x_0 \neq 0$ și sînt verificate condițiile teoremei 20. Astfel, funcția $f^{-1} = \arcsin$ este derivabilă în orice punct $y_0 \in (-1, 1)$.

Notăm $y_0 = \sin x_0$. Atunci $\arcsin y_0 = x_0$. Aplicînd formula (11), obținem:

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}},\ \forall y_0 \in (-1, 1).$$

Revenind la notațiile uzuale, reținem formula:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1, 1)}. \tag{12}$$

2. *Derivata funcției arccosinus*

Fie funcția $f\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

Raționînd în mod analog sau aplicînd relația $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, obținem formula:

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)}. \tag{13}$$

3. *Derivata funcției arctangentă*

Fie funcția $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

În orice punct $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $(\operatorname{tg})'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0} \neq 0$ și sînt verificate condițiile teoremei 20. Astfel, funcția $f^{-1} = \operatorname{arctg}$ este derivabilă în orice punct $y_0 \in \mathbb{R}$, unde $y_0 = \operatorname{tg} x_0$. Obținem $(\operatorname{arctg})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x_0}} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2}$.

Revenind la notațiile uzuale, obținem formula:

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}}. \tag{14}$$

4. *Derivata funcției arccotangentă*

Fie funcția $f\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

Raționînd în mod similar, obținem formula:

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}}. \tag{15}$$

4.5. Derivarea funcției de tipul $f(x) = u(x)^{v(x)}$, unde $u(x) > 0$

Fie funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = u(x)^{v(x)}$, unde $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Această funcție, în caz general, nefiind nici funcție putere, nici funcție exponențială, nu poate fi derivată aplicînd formulele (3), (8) din § 3, ci aplicînd identitatea logaritmică fundamentală $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)}$. Funcția $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$, astfel obținută, este o funcție compusă. Derivînd-o, obținem:

$$f'(x) = (e^{v(x)\ln u(x)})' = e^{v(x)\ln u(x)} \cdot (v(x)\ln u(x))' = u(x)^{v(x)} \cdot (v(x)\ln u(x))' = f(x) \cdot (\ln f(x))'. \tag{16}$$

De aici rezultă formula pentru derivata funcțiilor de tipul $f(x) = u(x)^{v(x)}$, unde $u(x) > 0$:

$$\boxed{(u^v)' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right)}. \tag{17}$$

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze derivata funcției:

a) $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^x$; b) $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{\sqrt{x}} \lg 5x$ (a se vedea exercițiul de la începutul § 3).

Rezolvare:

a) Conform formulei (16), $f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$.

Deci, $(x^x)' = x^x \cdot (\ln x^x)' = x^x (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$.

b) $f'(x) = (x^{\sqrt{x}} \lg 5x)' = (x^{\sqrt{x}})' \cdot \lg 5x + x^{\sqrt{x}} \cdot (\lg 5x)'$. Să calculăm întîi derivata funcției $g: D \to \mathbb{R},\ g(x) = x^{\sqrt{x}}$.

Aplicînd formula (17) și formula $(\ln u^v)' = (v \ln u)' = v' \cdot \ln u + v \cdot \dfrac{u'}{u}$, obținem $(\ln x^{\sqrt{x}})' = \dfrac{1}{x^{\sqrt{x}}} \cdot (x^{\sqrt{x}})'$, sau $(x^{\sqrt{x}})' = \dfrac{(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. Atunci

$$f'(x) = \frac{(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}} \cdot \lg 5x}{2\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{x \ln 10} = 0{,}5(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x} - 0{,}5} \cdot \lg 5x + x^{\sqrt{x} - 1} \lg e.$$

4.6. Derivate de ordin superior

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Valorile lui $f'(x)$ depind, în general, de x, adică derivata funcției f este, la rîndul său, o funcție de x. Prin urmare, poate fi pusă problema derivării funcției f'.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze derivata derivatei funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 e^x$.

Rezolvare:

$f'(x) = (x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x$.

Atunci $(f'(x))' = (2xe^x + x^2 e^x)' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x = e^x (x^2 + 4x + 2)$.

Definiție. Fie $f: I \to \mathbb{R}$. Se spune că **funcția f este derivabilă de două ori într-un punct $x_0 \in I$** dacă funcția f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0 și funcția f' este derivabilă în x_0.

În acest caz, derivata funcției f' în punctul x_0 se numește ***derivata de ordinul doi*** (sau ***derivata a doua***) ***a funcției f în punctul x_0*** și se notează $f''(x_0)$.

Așadar, $f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$.

Observație. Dacă funcția f este derivabilă de două ori în orice punct al intervalului I, atunci se spune că funcția f este derivabilă de două ori pe acest interval.

Exemple

1. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, obținem: $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$.

2. Pentru funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \cos x$, avem: $g'(x) = -\sin x$, $g''(x) = -\cos x$.

Similar se defineşte ***derivata de ordinul trei*** (sau ***derivata a treia***) ***a funcţiei f în punctul x_0***. Se notează: $f'''(x_0)$.

În mod analog se defineşte ***derivata de ordinul n***, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, ***a funcţiei f în punctul x_0***. Se notează $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$. Uneori, $f^{(n)}(x)$ se notează $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Observaţii. **1.** Ordinul derivatei se scrie între paranteze, pentru a nu fi confundat cu exponentul puterii (exclusiv cazurile în care ordinul derivatei se notează cu cifre romane).
2. S-a convenit ca derivata de ordinul zero a funcţiei f să fie considerată însăşi funcţia f, adică $f^{(0)} = f$.

Exemple

1. Pentru funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, obţinem: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$. Aplicînd metoda inducţiei matematice, se poate demonstra formula: $\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}}$.

2. Similar obţinem formula: $\boxed{(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}}$.

3. Pentru funcţia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$, obţinem: $g'(x) = e^x$, $g''(x) = e^x$, $g'''(x) = e^x$.

Reţineţi: $(e^x)^{(n)} = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exerciţiu rezolvat

Să se deducă formula binomului lui Newton folosind derivata funcţiei.

Rezolvare:

Ridicînd binomul $a + x$ la puterea n, $n \in \mathbb{N}^*$, obţinem identitatea:

$$(a+x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n,\ x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

unde $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sînt coeficienţii care urmează a fi determinaţi.

Substituim $x = 0$ în identitatea (18) şi obţinem:

$$A_0 = a^n. \tag{19}$$

Pentru a determina A_1, derivăm ambii membri ai identităţii (18):

$((a+x)^n)' = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n)'$, sau

$$n(a+x)^{n-1} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1}. \tag{20}$$

Considerînd $x = 0$ în (20), obţinem $n \cdot a^{n-1} = A_1$. Atunci

$$A_1 = \frac{n \cdot a^{n-1}}{1}.$$

Derivînd ambii membri ai identităţii (20) şi substituind $x = 0$ în expresiile obţinute, deducem formula pentru A_2 (verificaţi!):

$$A_2 = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}.$$

Procedînd similar, vom calcula şi ceilalţi coeficienţi: $A_3, A_4, \ldots, A_n$. Derivînd de k ori ($k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$) ambii membri ai identităţii (18) şi substituind $x = 0$ în expresiile respective, obținem: $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a^{n-k}=1\cdot2\cdot\ldots\cdot k\cdot A_k$. Atunci

$$A_k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}.$$

Se știe că numerele $\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}$ se numesc ***coeficienți binomiali*** din formula binomului lui Newton și că se notează C_n^k.

Deci, $A_k=C_n^k a^{n-k}$, unde $C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Prin urmare,

$$(a+x)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}x+C_n^2a^{n-2}x^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}x^k+\ldots+x^n. \quad (21)$$

Astfel, aplicînd derivata funcției, am dedus formula binomului lui Newton (21).

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze f' pentru funcția $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=5x^6$; b) $f(x)=\pi e^x$; c) $f(x)=-0{,}5\log_{\frac{1}{3}}x$;

d) $f(x)=x^3-5x^2$; e) $f(x)=7x^2-3x+2$; f) $f(x)=2\log_5 x+2\,010$.

2. Să se determine domeniul de definiție D_f, să se calculeze f' și să se determine domeniul de derivabilitate $D_{f'}$ pentru funcția $f: D_f\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x+\sqrt{x}$; b) $f(x)=\log_3 x+x^5$; c) $f(x)=xe^x$;

d) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$; e) $f(x)=\sqrt[3]{x}\log_{\frac{1}{5}}x$; f) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$;

g) $f(x)=\frac{x}{x^3+2x}$; h) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$; i) $f(x)=\frac{e^x}{x-3}$;

j) $f(x)=\sqrt{2x^2-x}$; k) $f(x)=-4\log_2\sqrt{2x}$.

3. Să se calculeze f' în punctul x_0, dacă:

a) $f: \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$, $x_0=\sqrt{2}$; b) $f: (0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}\log_5 2x$, $x_0=0{,}25$.

4. Dintr-un punct pleacă un mobil care efectuează o mișcare descrisă de ecuația $s(t)=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+7t$ (s este distanța exprimată în metri, iar t – timpul exprimat în secunde).

Să se determine:

a) formula de calcul al vitezei mobilului; b) viteza mobilului în momentul $t=2$ s;

c) peste cîte secunde mobilul se va opri.

5. Dintr-un punct pleacă concomitent două mobile ale căror ecuații de mișcare sînt $s_1(t)=6t^2+4t$ și $s_2(t)=t^3+3t^2+6t$, unde distanța s se exprimă în metri și timpul t – în secunde.

a) Să se determine momentele de întîlnire a acestor mobile.

b) Să se determine formulele vitezelor și ale accelerațiilor celor două mobile.

c) Să se determine vitezele și accelerațiile mobilelor în momentele de întîlnire.

d) Să se determine momentele în care vitezele și respectiv accelerațiile lor sînt egale.

B

6. Să se calculeze f' pentru funcția $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^{25} - \sqrt{x} + \cos x$; b) $f(x) = \sin x + \log_{0,3} x - \sqrt[5]{x}$; c) $f(x) = 5\ln x + \sqrt{3x} - \frac{5}{x^2}$;

d) $f(x) = \sqrt[6]{2x} + 7e^x - \frac{1}{3}x^{-9}$; e) $f(x) = \sqrt{5}\cos x - 7\sin x - 4\ln x$; f) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} \cdot \sin x$;

g) $f(x) = 8x^3 \ln x$; h) $f(x) = 6 - 0{,}6x^{-5}\log_3 x$; i) $f(x) = 5\ln(x^2 - 3x)$;

j) $f(x) = \sqrt{2}\log_5^3 \operatorname{tg} x$; k) $f(x) = 6^{3x}\sin^2 4x$; l) $f(x) = \frac{\cos(3x^2 - 1)}{\ln^2 x}$.

7. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \cos^2 2x$, în $x_0 = \frac{\pi}{3}$; b) $f(x) = \lg^2(3x - 1)$, în $x_0 = \frac{2}{3}$; c) $f(x) = x^{\sqrt{x+2}}$, în $x_0 = 1$.

8. Se consideră funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ ax^2 + bx + c, & \text{dacă } x \in [0, +\infty). \end{cases}$

Să se determine valorile parametrilor reali a, b şi c, astfel încît funcția f să fie derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

9. Să se scrie cel puțin o funcție $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a cărei derivată este:

a) $f'(x) = 2 - \cos x$; b) $f'(x) = -2e^{2x}$; c) $f'(x) = 2\sin 2x$.

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x) = 0$, dacă:

a) $f(x) = 2\sin^2 x + \sqrt{2}x$; b) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}x$.

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f'(x) > 0$, dacă:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$; b) $f(x) = 3x + \cos(6x - \pi)$.

12. Să se calculeze f'' pentru funcția $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6$; b) $f(x) = 2\sin 3x$; c) $f(x) = 5e^{-2x}$;

d) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$; e) $f(x) = \ln x$; f) $f(x) = \arccos\frac{x}{3}$;

g) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$; h) $f(x) = \frac{3^{2x}}{(x - 1)^2}$; i) $f(x) = (\sqrt{x})^{x-1}$.

13. Să se calculeze $f''(x) - 5f'(x) + 3f(x)$, ştiind că $f\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

14. Un mobil se deplasează conform ecuației de mişcare $s(t) = \sqrt{t}$. Să se demonstreze că accelerația mobilului este proporțională cu cubul vitezei lui.

15. Să se afle forța F ce acționează în momentul $t = 3$ asupra unui mobil de masă m, care efectuează o mişcare descrisă de ecuația $s(t) = 4t^3 - t^2$ (masa m este exprimată în kilograme, distanța s – în metri şi timpul t – în secunde).

16. Să se calculeze $f^{(5)}(0)$, dacă $f(x) = e^{2x} \cdot x^3$.

17. Folosind derivata, să se calculeze suma $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$, unde C_n^k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sînt coeficienți binomiali.

18. Să se demonstreze, aplicînd metoda inducției matematice, formula lui Leibniz:

$(f \cdot g)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + \ldots + C_n^{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n)}$.

§5 Diferențiala unei funcții

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ o funcție derivabilă pe intervalul I şi $x_0 \in I$. Atunci, conform definiției derivatei, avem

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Din (1) şi din definiția limitei unei funcții într-un punct rezultă că

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \qquad (2)$$

unde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Folosind relația (2), obținem

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad \text{sau}$$

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \qquad (3)$$

Din relația (3) rezultă că creşterea $\Delta f(x_0)$ a funcției f derivabile în punctul x_0 se exprimă ca o sumă de doi termeni: termenul $f'(x_0) \cdot \Delta x$, care este direct proporțional cu creşterea argumentului, şi termenul $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, unde $\alpha(\Delta x) \to 0$ cînd $\Delta x \to 0$.

Definiție. Funcția liniară $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$, se numeşte **diferențiala funcției f în punctul x_0** şi se notează $\mathrm{d}f(x_0)$.

Deci, $\boxed{\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x}$. (4)

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze diferențiala funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Rezolvare:

Cum $f'(x_0) = 1$, obținem $\mathrm{d}x = \Delta x$. În baza relației (4), $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$.

Consecință. Dacă funcția f este derivabilă în orice punct din I, obținem formula:

$$\boxed{\mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot \mathrm{d}x, \quad \forall x \in I}. \qquad (5)$$

Exemple

1. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, obținem:

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}(\sin x) = (\sin x)' \mathrm{d}x = \cos x \, \mathrm{d}x.$$

2. Pentru funcția $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_8 x$, avem:

$$\mathrm{d}g(x) = \mathrm{d}(\log_8 x) = \frac{1}{x \ln 8} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln 8}.$$

Interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții f derivabile într-un punct x_0 este reprezentată în figura 4.11. Trasăm tangenta la graficul G_f în punctul $A(x_0, f(x_0))$. Avem $\Delta x = AB$, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \dfrac{BC}{AB}$ (a se vedea ΔABC cu $m(\angle B) = 90°$).

Atunci $BC = f'(x_0) \cdot AB$, sau $BC = f'(x_0) \Delta x = \mathrm{d}f(x_0)$.

Deci, *interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții* f *într-un punct* x_0 este următoarea: $\Delta f(x_0)$ reprezintă creșterea *ordonatei funcției* f în punctul $(x_0, f(x_0))$, ce corespunde creșterii Δx a argumentului ei, iar $\mathrm{d}f(x_0)$ – creșterea *ordonatei tangentei* la graficul G_f în punctul $(x_0, f(x_0))$, care corespunde aceleiași creșteri Δx a argumentului funcției f (fig. 4.11).

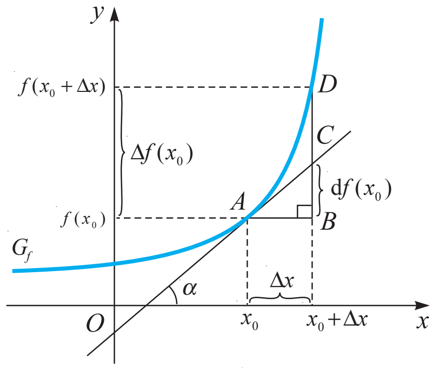


Fig. 4.11

Formulele (3) și (4) implică următoarea relație de aproximare:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0), \qquad (6)$$

sau $BD \approx BC$.

Din relația (6) rezultă:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x. \qquad (7)$$

Pentru Δx suficienți de mici avem $f(x_0 + \Delta x) \approx y$. Cu alte cuvinte, în vecinătatea punctului A, pe o porțiune suficient de mică a graficului funcției f, arcul de curbă este aproximat cu un segment al tangentei la graficul G_f în punctul A.

Formula (7) se aplică deseori la calculul aproximativ al valorii unei funcții într-un punct indicat.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze cu aproximație valoarea funcției f definite prin formula $f(x) = 4x^2 - x - 15$ în punctul $x = 1{,}1$.

Rezolvare:

$x = 1{,}1 = 1 + 0{,}1 = x_0 + \Delta x.$ Atunci $x_0 = 1,\ \ \Delta x = 0{,}1.$ Calculăm $f(1)$ și $f'(1)$:

$f(1) = 4\cdot 1^2 - 1 - 15 = -12;\ \ f'(x) = 8x - 1$ și $f'(1) = 8\cdot 1 - 1 = 7.$

Substituind în (6), obținem $f(1{,}1) \approx f(1) + f'(1)\cdot 0{,}1 = -12 + 7\cdot 0{,}1 = -11{,}3.$ Valoarea exactă a funcției f în punctul 1,1 este $f(1{,}1) = -11{,}26.$

Observații. Aplicînd formula (7), se pot deduce formulele:

1. $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x.$ (8)

2. $(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\cdot \Delta x,\ n \in \mathbb{N}^*.$ (9)

Exercițiu. Deduceți formulele (8) și (9).

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze cu aproximație: a) $\sqrt{4{,}008}$; b) $(1{,}003)^{100}$.

Rezolvare:

a) Aplicînd formula (8), obținem:

$$\sqrt{4{,}008} = \sqrt{4(1+0{,}002)} = 2\sqrt{1+0{,}002} \approx 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}002\right) = 2\cdot 1{,}001 = 2{,}002.$$

Folosind calculatorul de buzunar, avem: $\sqrt{4{,}008} \approx 2{,}00199.$

b) În baza formulei (9), obținem: $(1{,}003)^{100} = (1+0{,}003)^{100} \approx 1+100\cdot 0{,}003 = 1{,}3.$

Folosind calculatorul de buzunar, avem: $(1{,}003)^{100} \approx 1{,}3493.$

Formula (7) poate fi aplicată la calculul aproximativ al valorilor oricăror funcții derivabile în punctul x_0, inclusiv al valorilor funcțiilor trigonometrice. Menționăm că în analiza matematică unghiurile se măsoară numai în radiani.

Observație. Formulele (7)–(9) pot fi aplicate doar pentru valori suficient de mici ale lui Δx.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze cu aproximație $\sin 31°$.

Rezolvare:

Fie $f(x)=\sin x$. Avem $\sin 31° = (\sin 30° + 1°) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$.

Astfel, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$. Considerăm $x_0 = \frac{\pi}{6}$, iar $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

Atunci $f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$.

Cum $f(x_0)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $f'(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, obținem:

$$\sin 31° \approx \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{2\cdot 180} \approx 0{,}52.$$

Din definiția diferențialei unei funcții rezultă că tabloul derivatelor funcțiilor elementare se poate transcrie în tabloul diferențialelor funcțiilor respective:

$\mathrm{d}(c)=0,\ c\in\mathbb{R}$; $\quad \mathrm{d}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x,\ \alpha\in\mathbb{R}$; $\quad \mathrm{d}(\sqrt{x}) = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$;

$\mathrm{d}(e^x)=e^x\mathrm{d}x$; $\quad \mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\,\mathrm{d}x$; $\quad \mathrm{d}(\ln x)=\frac{\mathrm{d}x}{x}$;

$\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$; $\quad \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{\mathrm{d}x}{x\ln a}$; $\quad \mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$; $\quad \mathrm{d}(\mathrm{tg}\, x) = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$; $\quad \mathrm{d}(\mathrm{ctg}\, x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$;

$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$\mathrm{d}(\mathrm{arctg}\, x) = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; $\quad \mathrm{d}(\mathrm{arcctg}\, x) = -\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Regulilor de derivare (harta noțională a modulului 4) le corespund reguli similare de diferențiere.

Exemple

1. $\mathrm{d}(e^x\cdot x^3) = e^x\cdot x^3\cdot\mathrm{d}x + 3x^2\cdot e^x\cdot\mathrm{d}x = x^2e^x(x+3)\mathrm{d}x.$

2. $\mathrm{d}(\sin 3x) = 3\cos 3x\,\mathrm{d}x.$

Exerciții propuse

B

1. Aplicînd formula (6), să se calculeze cu aproximație valorile funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = x^3 - 2x$, în $x_1 = 1{,}04$, $x_2 = 0{,}98$; b) $f(x) = x^2 + 5x - 1$, în $x_1 = 25{,}04$, $x_2 = 0{,}98$.
2. Aplicînd formulele (7), (8) şi (9), să se calculeze cu aproximație:
   a) $(1{,}0008)^{200}$; b) $(0{,}996)^7$; c) $\sqrt{36{,}011}$; d) $\sqrt{0{,}998}$; e) $\ln(1{,}05)$.
3. Să se calculeze diferențiala funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = x^3 + 2x$; b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$; c) $f(x) = \sin(x+1)$; d) $f(x) = 2^{3x}$; e) $f(x) = \cos 2x$.
4. Să se calculeze diferențiala funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = x \cdot \log_2 x$; b) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$;
   c) $f(x) = x \cdot \operatorname{ctg}(x+5) - \ln 5x$; d) $f(x) = 3\ln\frac{x}{3} + 5$.
5. Să se calculeze diferențiala funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, în $x_0 = -2$; b) $f(x) = \sin x - \cos x$, în $x_0 = \frac{\pi}{3}$;
   c) $f(x) = \log_2(x^2 + 3)$, în $x_0 = 1$.
6. Să se calculeze diferențiala funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = \sqrt{x} + 5x^4 - x^{-7}$; b) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x} - \ln(x^2 - 1) + 7$; c) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - \sqrt[5]{x^2 - x}$.
7. Să se calculeze diferențiala funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = \sin 2x - \cos^3 x + 5$, în $x_0 = \frac{\pi}{6}$; b) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x + 5\arccos x$, în $x_0 = 1$;
   c) $f(x) = -\sqrt{5} \cdot 7^{x^2} + \arcsin\frac{x}{3}$, în $x_0 = 0$; d) $f(x) = x^3 e^{2x}$, în $x_0 = 2$.
8. Aplicînd formula (7), să se calculeze cu aproximație:
   a) $\cos 46°$; b) $\lg 11{,}2$; c) $e^{0{,}93}$; d) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}004\right)$; e) $\frac{1}{1{,}004^{20}}$.

§6 Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

În continuare vom pune în evidență unele proprietăți generale ale funcțiilor derivabile. Teoremele ce urmează sînt ***teoreme fundamentale ale analizei matematice***.

6.1. Teorema lui Fermat

Reamintim!

Punctele de maxim (minim) local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.

Pierre de Fermat

Teorema 21 (teorema lui Fermat[1]). Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I şi $x_0 \in I$. Dacă x_0 este un punct de extrem local al funcției f, atunci $f'(x_0) = 0$.

[1] Pierre de Fermat (1601–1665) – matematician francez.

Demonstrație

Presupunem că x_0 este un punct de maxim local al funcției *f*. Atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 $(V(x_0) \subset I)$, astfel încît $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0)$. Pentru $x \in V(x_0)$, $x < x_0$, avem $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, iar pentru $x \in V(x_0)$, $x > x_0$, obținem $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$.

Deoarece funcția *f* este derivabilă în x_0, rezultă că $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$, unde $f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$. Deci, $f'(x_0) \ge 0$ și $f'(x_0) \le 0$, de unde rezultă că $f'(x_0) = 0$.

Teorema se demonstrează similar și în cazul în care x_0 este un punct de minim local al funcției *f*. Pentru acest caz teorema mai poate fi demonstrată substituind în demonstrația de mai sus f cu $-f$. ►

Interpretare geometrică. În condițiile teoremei lui Fermat, tangenta la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa *Ox* (fig. 4.12).

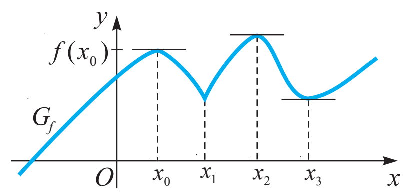


Fig. 4.12

Observație. Teorema lui Fermat exprimă doar *condiția necesară* pentru ca funcția derivabilă f să aibă în punctul x_0 extrem local. Din faptul că derivata funcției f se anulează în x_0 încă nu rezultă, în mod obligatoriu, că această funcție are în x_0 extrem local.

De exemplu, derivata funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, se anulează în $x_0 = 0$, însă $x_0 = 0$ nu este punct de extrem local pentru funcția f (fig. 4.13).

Acest exemplu demonstrează că reciproca teoremei lui Fermat este falsă.

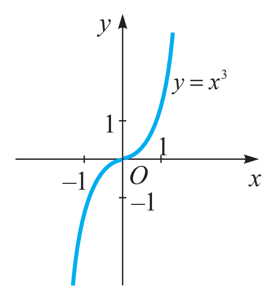
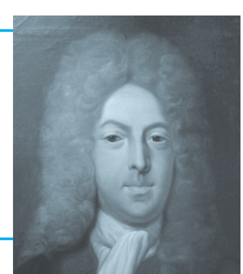


Fig. 4.13

6.2. Teorema lui Rolle

Următoarea teoremă, foarte utilă în aplicații, este o consecință a proprietăților funcțiilor continue și a teoremei lui Fermat.

Teorema 22 (teorema lui Rolle[1]). Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$
1) este continuă pe $[a, b]$,
2) este derivabilă pe (a, b) și
3) $f(a) = f(b)$,
atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f'(c) = 0$.



Michel Rolle

[1] Michel Rolle (1652–1719) – matematician francez.

Demonstrație

Funcția f, fiind continuă pe $[a, b]$, conform teoremei II Weierstrass (modulul 3, secvența 3.1), este mărginită și își atinge marginile pe acest interval.

Fie $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m, M \in \mathbb{R}$. Sînt posibile cazurile: $m = M$; $m < M$.

1) Dacă $m = M$, atunci funcția f este constantă pe $[a, b]$.

Prin urmare, $f'(c) = 0$ pentru orice $c \in (a, b)$.

2) Dacă $m < M$, atunci f nu este o funcție constantă pe $[a, b]$. Din condiția $f(a) = f(b)$ rezultă că funcția f nu-și atinge cel puțin una din margini, m sau M, în extremitățile segmentului $[a, b]$. Adică, există un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f(c) = m$ sau $f(c) = M$. Cum c este un punct de extrem local, conform teoremei lui Fermat, $f'(c) = 0$. ►

Observație. Orice funcție cu proprietățile 1) și 2) se numește ***funcție Rolle***.

Interpretare geometrică. Dacă segmentul determinat de punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ este paralel cu axa Ox, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît tangenta în punctul $(c, f(c))$ al graficului funcției derivabile f este paralelă cu axa Ox (fig.4.14).

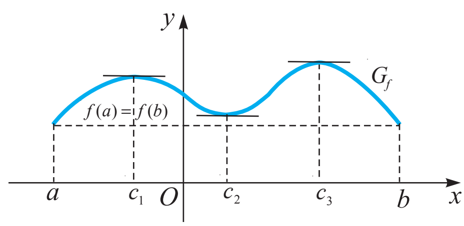


Fig. 4.14

Exemplu

Funcția $f\colon [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$, verifică următoarele condiții:

1) este continuă pe $[-1, 0]$,

2) este derivabilă pe $(-1, 0)$,

3) $f(-1) = f(0) = 1$.

Conform teoremei lui Rolle, există cel puțin un punct $c \in (-1, 0)$, astfel încît $f'(c) = 0$. Să determinăm acest punct c.

Avem $f'(x) = 6x^2 - 2 = 0$ cu $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \notin (-1, 0)$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, 0)$. Așadar, $c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

***Observații.* 1.** Punctul c din teorema lui Rolle nu întotdeauna este unic pentru funcția dată.

2. Dacă se renunță la cel puțin una dintre ipotezele teoremei lui Rolle, atunci concluzia teoremei este falsă.

Exercițiu. Fie funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 2, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$ $I = [0, 1]$; b) $f(x) = 2x$, $I = [0, 1]$;

c) $f(x) = |x|$, $I = [-1, 1]$.

Determinați care dintre condițiile teoremei lui Rolle nu se verifică și convingeți-vă că, în acest caz, concluzia teoremei lui Rolle este falsă.

Corolare ale teoremei lui Rolle

1. Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval se află cel puțin un zerou al derivatei acestei funcții (fig.4.15).

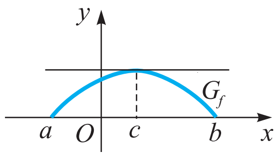


Fig. 4.15

2. Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval se află cel mult un zerou al acestei funcții (fig. 4.16).

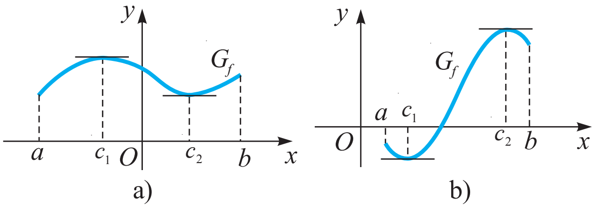
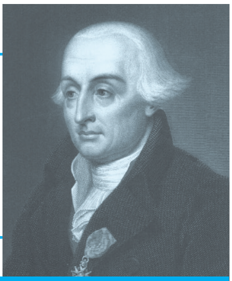


Fig. 4.16

6.3. Teorema lui Lagrange



Joseph Louis Lagrange

Teorema 23 (teorema lui Lagrange[1]). Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă funcția f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b), atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Demonstrație

Considerăm funcția auxiliară $F: [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - mx$, $m \in \mathbb{R}$. Funcția F este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b). Determinăm constanta $m \in \mathbb{R}$, astfel încît $F(a) = F(b)$, adică $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Cum funcția F satisface condițiile teoremei lui Rolle, rezultă că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît $F'(c) = 0$.

Din relațiile $F'(x) = f'(x) - m$ și $F'(c) = 0$ rezultă că $f'(c) = m$.

Prin urmare, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, sau $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ (1). ►

Interpretare geometrică. Graficul funcției f admite tangentă în orice punct $x \in (a, b)$. Dreapta care trece prin punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ are panta $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = m_1$, iar tangenta la graficul funcției f în punctul $(c, f(c))$ are panta $f'(c) = m_2$. Cum $m_1 = m_2$, rezultă că aceste drepte sînt paralele.

Așadar, în condițiile teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct al graficului G_f în care tangenta este paralelă cu secanta AB (fig. 4.17).

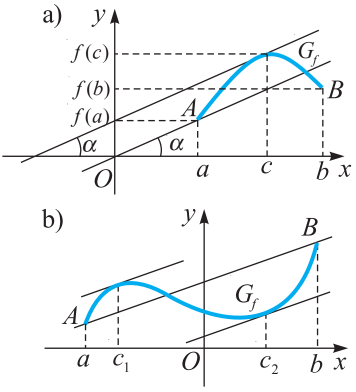


Fig. 4.17

[1] Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – matematician și mecanician francez.

Exercițiu rezolvat

Să se aplice teorema lui Lagrange funcției $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 6-2x^2, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{4}{x}, & x \in (1, 2] \end{cases}$ și să se determine efectiv c.

Rezolvare:

Funcția f este continuă și derivabilă pe fiecare dintre intervalele $[0, 1)$ și $(1, 2]$. Deoarece $f(1-0) = f(1) = f(1+0) = 4$, rezultă că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 1$ și deci continuă pe $[0, 2]$.

Avem $f'(x) = \begin{cases} -4x, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ -\dfrac{4}{x^2}, & \text{dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$

În baza definițiilor derivatelor laterale, $f'_s(1) = f'_d(1) = -4$. Rezultă că $f'(1) = -4$. Deci, funcția f este derivabilă pe $(0, 2)$. Atunci, conform teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct $c \in (0, 2)$, astfel încît $f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2-0)$, adică $f'(c) = -2$. Ținînd cont de derivata funcției f pe intervalele indicate, obținem ecuația $-4c = -2$ pentru $c \in (0, 1)$ și ecuația $-\dfrac{4}{c^2} = -2$ pentru $c \in (1, 2)$, cu soluțiile $c_1 = 0{,}5$ și respectiv $c_2 = \sqrt{2}$. Așadar, am obținut două puncte: c_1 și c_2.

Răspuns: $c_1 = 0{,}5$; $c_2 = \sqrt{2}$.

Observații. **1.** Formula (1) se numește ***formula lui Lagrange*** sau ***formula creșterilor finite***.

2. Ca și în cazul teoremei lui Rolle, punctul c nu întotdeauna este unic pentru funcția dată.

3. Teorema lui Lagrange este o generalizare a teoremei lui Rolle.
Într-adevăr, dacă în teorema lui Lagrange se verifică și condiția $f(a) = f(b)$, atunci din formula (1) rezultă că $f'(c) = 0$, adică obținem concluzia din teorema lui Rolle.

4. Corolarul referitor la monotonia funcției se va studia în modulul 5 (teorema 2, § 1, secvența 1.1).

Corolare ale teoremei lui Lagrange

1. Dacă $f\colon I \to \mathbb{R}$ este derivabilă și $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci f este constantă pe I.

2. Dacă $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sînt derivabile pe intervalul I și $f' = g'$, atunci funcția $g - f$ este constantă pe I.

3. Fie f o funcție definită într-o vecinătate V a punctului x_0, derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$ și continuă în x_0. Dacă există $\lambda = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci există $f'(x_0)$ și $f'(x_0) = \lambda$.

Observație. Corolarul **3** impune o condiție suficientă ca f să fie derivabilă în x_0. Această condiție nu este însă și necesară.

De exemplu, funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$ este continuă și derivabilă în $x_0 = 0$, dar $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nu există.

6.4. Regulile lui l'Hospital


Guillaume de l'Hospital

Unele limite de funcții pot fi calculate cu ajutorul derivatelor. Aplicarea următoarelor două teoreme, numite ***regulile lui l'Hospital***[1], fac posibil calculul unor limite de forma $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, în cazurile în care $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ sau dacă aceste limite sînt infinite.

6.4.1. Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{0}{0}$

Teorema 24. Fie I un interval ($I\subseteq\mathbb{R}$), $x_0\in I$ și funcțiile $f, g\colon I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$. Dacă

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, 2) funcțiile f și g sînt derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$,

3) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in V(x_0)\cap I$, 4) există limita (finită sau infinită) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, și $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

6.4.2. Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 25. Fie I un interval, $x_0\in I$ și funcțiile $f, g\colon I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$. Dacă

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, 2) funcțiile f și g sînt derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$,

3) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in V(x_0)\cap I$, 4) există limita (finită sau infinită) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, și $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Observații. **1.** Teoremele 24 și 25 sînt adevărate și pentru limite laterale în punctul indicat.

2. Regulile lui l'Hospital sînt adevărate și în cazul în care $x\to\infty$.

3. Teoremele 24 și 25 reprezintă *condiții suficiente* pentru rezolvarea cazurilor exceptate $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

4. Dacă nedeterminarea $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ este prezentă atît în $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, cît și în $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ și dacă funcțiile f, g, f', g', precum și ambele aceste limite verifică condițiile regulii respective a lui l'Hospital, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. În acest caz se spune că s-a aplicat succesiv de două ori regula lui l'Hospital.

[1] Guillaume de l'Hospital (1661–1704) – matematician francez.

Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze: **1.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$; **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}$.

Rezolvare:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2}=\frac{3}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$

Observaţie. În unele cazuri apare necesitatea de a aplica succesiv regulile lui l'Hospital de trei sau de mai multe ori.

6.4.3. Cazurile exceptate $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0

Cazurile exceptate $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 pot fi reduse la cazul exceptat $\frac{0}{0}$ sau la cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$ prin metodele propuse în modulul 2.

Exerciţii rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to+0}(x^2\cdot\ln x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to+0}x^x$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$.

Rezolvare:

a) Sîntem în cazul exceptat $0\cdot\infty$. Avem $x^2\cdot\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$. Atunci $f(x)=\ln x$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$, şi $f,g\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=+\infty$. Funcţiile f şi g sînt derivabile: $f'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$ şi $g'(x)=-\frac{2}{x^3}\neq 0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

Aşadar, $\lim\limits_{x\to+0}(x^2\ln x)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to+0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0.$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to+0}(x^2\cdot\ln x)=0.$

b) Avem cazul exceptat $\infty-\infty$. Cum $\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\operatorname{tg}x}{x\operatorname{tg}x}$, obţinem cazul exceptat $\frac{0}{0}$.

Deci,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{tg}x)'}{(x\operatorname{tg}x)'}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x\operatorname{tg}x+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos x\cdot\sin x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\frac{1}{2}\sin 2x+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos^2 x-1)'}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x}{\cos 2x+1}=0.$$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}\right)=0.$

Observaţie. În exemplul b) am aplicat regula lui l'Hospital succesiv de două ori, deoarece, aplicînd-o prima dată, am obţinut iarăşi cazul exceptat $\frac{0}{0}$.

c) Avem cazul exceptat 0^0. Fie $f(x)=x^x$. Atunci $\ln f(x)=x\cdot\ln x$.

Deci, $f(x)=e^{x\ln x}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$, obținem:

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)}=e^0=1.$$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to+0}x^x=1$.

d) Sîntem în cazul exceptat 1^∞.

Fie $f\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$, atunci $\ln f(x)=2x\cdot\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{2x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x^2-1}}{-\frac{1}{2x^2}}=-4.$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}=e^{-4}$.

Exercițiul d) poate fi rezolvat şi cu ajutorul formulei $u^v=e^{v\ln u}$.

Observație. Regulile lui l'Hospital se folosesc şi la calculul unor limite de şiruri.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$.

Rezolvare:

Considerăm funcția $f\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, şi calculăm $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Sîntem în cazul exceptat ∞^0.

Logaritmînd $f(x)$, avem cazul exceptat $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x,\ \text{iar}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Atunci $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}=e^0=1$.

Răspuns: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$.

Rezolvare:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

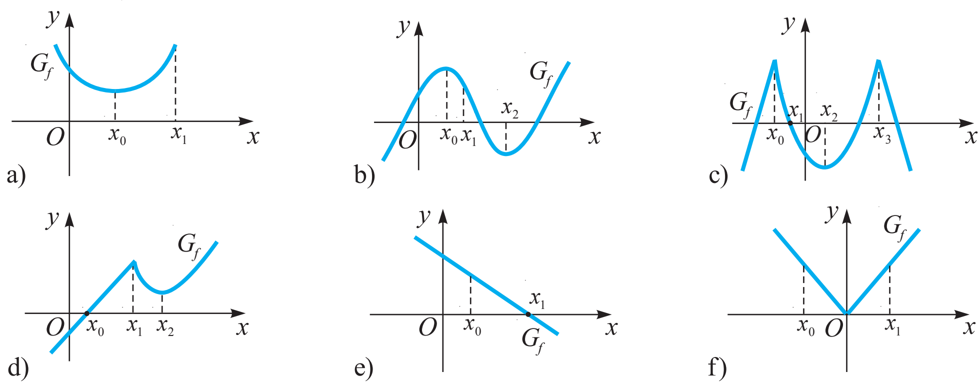
Răspuns: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}=0$.

Observație. În calculul limitelor de funcții se recomandă combinarea metodelor elementare cu regulile lui l'Hospital.

Exerciții propuse

A

1. Să se determine în care dintre punctele indicate sînt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția f definită grafic:



2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$; b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

1) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$ şi să se determine dacă sînt verificate condițiile teoremei lui Fermat în punctul x_0, unde x_0 este soluția acestei ecuații.

2) Să se reprezinte graficul funcției f şi să se interpreteze geometric teorema lui Fermat în punctul x_0.

3. Să se determine dacă în punctul $x_0 = 1$ sînt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (x-1)^2$; b) $f(x) = (x-1)^3$.

4. Să se traseze graficul unei funcții, astfel încît în punctele $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ să se verifice condițiile teoremei lui Fermat.

B

5. Să se dea exemple de funcții pentru care un număr finit de puncte ale intervalului respectiv sînt puncte de extrem local, dar în aceste puncte nu se verifică teorema lui Fermat.

6. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle funcției f şi, în caz afirmativ, să se determine efectiv punctul c:

a) $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x-3)$; b) $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|$;

c) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$; d) $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$.

7. Fie funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ x^2 - bx + d, & \text{dacă } x \in [0, 1]. \end{cases}$

a) Să se determine parametrii reali a, b, d, astfel încît funcția f să satisfacă condițiile teoremei lui Rolle pe $[-1, 1]$.

b) Să se aplice teorema lui Rolle funcției f cu parametrii a, b, d determinați în a) şi să se afle efectiv punctul c.

8. Fie funcția:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = (x^2-9)(x^2-16)$.

Să se arate că derivata funcției are numai zerouri reale.

9. Să se demonstreze că ecuația $2^x(1 + x\ln 2) - 20x^9 = 0$ are cel puțin o soluție pe $(0, 1)$.

10. Fie $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = x\sin x - \cos x - 1$. Să se arate că există cel puțin un punct $c \in (0, 2\pi)$, astfel încît $f''(c) = 0$.

11. Să se aplice teorema lui Lagrange funcției f şi să se determine efectiv punctul c:

a) $f: [-3, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 - x + 2$; b) $f: [1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x\ln x$;

c) $f: [0, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{dacă } x \in [0, 2] \\ 5x - 2, & \text{dacă } x \in (2, 3]; \end{cases}$ d) $f: [-1, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x + e^x$.

12. Să se dea exemplu de o funcție $f: [0, 8] \to \mathbb{R}$ ce satisface condițiile teoremei lui Lagrange, pentru care punctul intermediar $c \in (0, 8)$ nu este unic.

13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x, & \text{dacă } x \le 1 \\ 4\ln x + 3x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$ Să se afle $f'(1)$.

14. Aplicînd regulile lui l'Hospital, să se calculeze limita:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3 - 2x}{x^3 - 2x^2 + x}$; b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+1}}{3x^2 + 3x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{2x^2 - x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{x^3 - x}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x},\ n \in \mathbb{N}^*$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$; g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$; h) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1 + \cos x}{\sin 2x}$.

15. Aplicînd regula respectivă a lui l'Hospital, să se calculeze limita şirului:

a) $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$; b) $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{\ln^3 n}{\sqrt[50]{n}}$; c) $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{n^3}{1{,}01^n}$.

16. Să se formuleze şi să se rezolve exerciții asemănătoare cu ex. **6**, **7**, **11**, **14**.

Exerciții şi probleme recapitulative

A

În exercițiile 1 şi 2 determinați litera corespunzătoare variantei corecte.

1. Derivata funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$, este

A $f'(x) = 2x^2 - 2x$. **B** $f'(x) = 6x^2 - 2x$.

C $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$. **D** $f'(x) = 3x^2 - 2x$.

2. Fie funcția $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{2x - 2}$. Atunci

A $f'(1) = 0$. **B** $f'(1) = 2$. **C** $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. **D** $f'(1)$ nu există.

3. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, şi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 + x^2 + 1$.

a) Să se determine valoarea de adevăr a propoziției „$D_{f'} \subseteq D_{g'}$”.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul G_f în punctul $x_0 = 1$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f'(x) < g'(x)$.

d) Să se traseze în acelaşi sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor f' şi g'.

e) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f' şi g'.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x)=0$, unde f este funcția definită prin formula:
a) $f(x)=x^3-2x^2$; b) $f(x)=2x\ln x$; c) $f(x)=(x-1)e^x$.

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f'(x)\geq 0$, unde f este funcția definită prin formula $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

6. Dintr-un punct pornesc concomitent două mobile: primul cu viteza inițială de 8 m/s și accelerația de 4 m/s², iar al doilea – într-o mișcare uniformă cu viteza de 16 m/s.
a) Să se afle momentul de timp în care mobilele se vor întîlni, dacă se știe că ecuația mișcării uniform accelerate este $x(t)=v_0t+\dfrac{at^2}{2}$, iar ecuația mișcării uniforme este $x(t)=vt$.
b) Să se determine momentul de timp t în care viteza primului mobil va fi de două ori mai mare decît viteza celui de al doilea.

B

7. Să se calculeze diferențiala funcției f definită prin formula:
a) $f(x)=\cos(\sin x)$; b) $f(x)=\sin(\cos x)$; c) $f(x)=\ln(\ln x)$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x)=0$, unde f este funcția definită prin formula:
a) $f(x)=\sin x+\cos x$; b) $f(x)=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x$; c) $f(x)=e^{3x}+e^{-3x}$.

9. a) Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în punctele indicate:
1) $f(x)=x^2+x\cdot|x|$, $x_0=0$; 2) $f(x)=x+|x-3|$, $x_0=3$; 3) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leq 0\\ x^2, & x>0,\end{cases}$ $x_0=0$.
b) Să se traseze graficul fiecăreia dintre funcțiile f.

10. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{|x-3|}$.
a) Să se demonstreze că funcția f este continuă în punctul $x_0=3$, dar nu este derivabilă în acest punct.
b) Să se traseze graficul funcției f.

11. Fie $P\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție polinomială. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului P sînt reale și distincte, atunci P' are aceeași proprietate.

12. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

13. Să se demonstreze că deși $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$ există, nu pot fi aplicate direct regulile lui l'Hospital.

14. Să se verifice dacă formula lui Lagrange este adevărată pentru funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-x^2$, pe intervalul $[0, 1]$ și să se determine efectiv c.

15. Să se verifice justețea teoremei lui Rolle pentru funcția $f\colon D\to\mathbb{R}$ pe intervalul indicat:
a) $f(x)=\cos^2 x$, $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$; b) $f(x)=\sin^2 x$, $[0, \pi]$;
c) $f(x)=(x-3)(x-4)(x-5)$, $[3, 5]$.

16. Utilizînd regulile lui l'Hospital, să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{\ln(1+e^{3x})}$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3 + x - x^2$. ②
a) Completați cu unul dintre semnele <, =, >, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată: „$f'(-1) \square\ g'(0)$”.
b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $f'(x) \geq g'(x)$.
c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x) + f(x) = g'(x)$.

2. Fie funcția $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - \ln 2x$. ②
a) Completați, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată: „$D_f = \square$”.
b) Determinați valoarea de adevăr a propoziției:
„$D_f = D_{f'}$”.
c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = \frac{1}{2}$.

3. Calculați derivata funcției $f: D \to \mathbb{R}$: ③
a) $f(x) = x^2 \cdot 5^{3x}$;
b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x+5}$.

4. Un mobil se deplasează rectiliniu conform legii $s(t) = 3t^2 + 9\ln t + 18$ (distanța s este exprimată în centimetri, iar timpul t – în secunde). Aflați momentul de timp t în care accelerația este de 2 cm/s². ③

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

B

1. Fie funcțiile $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; $g: D_g \to \mathbb{R}$, $g(x) = 6x + 1$. ①
a) Determinați valoarea de adevăr a propoziției:
„$D_{f'} \subset D_{g'}$”.
b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x) = g'(x)$.
c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = \pi$.

2. Fie funcția $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{0,2}^2 6x$. ①
a) Completați, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată: „$D_f = \square$”.
b) Calculați diferențiala funcției f.
c) Aflați f''.

3. Fie funcția $f: D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} + 5\right) - \sqrt{3}x$. Rezolvați în $\mathbb{R}$: ②
a) ecuația $f'(x) = 0$;
b) inecuațiile $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$.

4. Utilizînd regulile lui l'Hospital, calculați limita $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. ②

5. Fie funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + d, & \text{dacă } x \in [-1, 0] \\ 1 + \ln(x^2 + 1), & \text{dacă } x \in (0, 1]. \end{cases}$ ②
a) Aflați $a, b, d \in \mathbb{R}$, astfel încît teorema lui Rolle să poată fi aplicată funcției f.
b) Aplicați teorema lui Rolle funcției f, cu parametrii a, b, d determinați în a).

6. Un mobil se deplasează rectiliniu conform legii $s(t) = \dfrac{t^3}{\ln 3} + 6\log_3 t + 20t$ (distanța s este exprimată în centimetri, iar timpul t – în secunde). Determinați momentul de timp t în care accelerația este de 0 cm/s². ②

Derivata și diferențiala funcției

Derivata funcției

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{sau} \quad f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Derivate laterale

$$f'_s(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'_d(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Diferențiala funcției

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$$

Regulile de calcul al derivatelor

1. $(f+g)'=f'+g'$
2. $(c\cdot f)'=c\cdot f'$
3. $(f-g)'=f'-g'$
4. $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
6. Derivata funcției compuse: $(g\circ f)'(x)=(g(f(x)))'=$ $=g'(f(x))\cdot f'(x)$
7. Derivata funcției inverse: $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$
8. Derivate de ordin superior: $f''=(f')'$; $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$

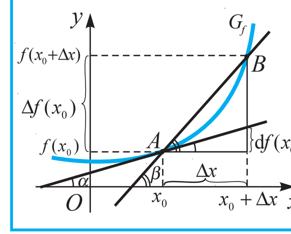
Tabelul derivatelor și diferențialelor funcțiilor elementare

f	D_f	f'	$D_{f'}$	$\mathrm{d}f$
1. c (constantă)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	0
2. $x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x$
3. $x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}^*$	$(0,\ +\infty)$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$(0,\ +\infty)$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$
4. $\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
5. $\sqrt[2n]{x},\ n\in\mathbb{N}^*$	$[0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2n\cdot\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2n\cdot\sqrt[2n]{x^{2n-1}}}\mathrm{d}x$
6. $\sqrt[2n+1]{x},\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}\mathrm{d}x$
7. $\sqrt{x}$	$[0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
8. $a^x,\ a>0,\ a\neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x\cdot\ln a$	$\mathbb{R}$	$a^x\ln a\,\mathrm{d}x$
9. e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^x\mathrm{d}x$
10. $\ln x$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
11. $\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$(0,\ +\infty)$	$\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$
12. $\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos x\,\mathrm{d}x$
13. $\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x\,\mathrm{d}x$
14. $\mathrm{tg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$
15. $\mathrm{ctg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$
16. $\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
17. $\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
18. $\mathrm{arctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$
19. $\mathrm{arcctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

Unele aplicații ale derivatelor

1. Ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă x_0: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
2. Aplicații la calculele aproximative
3. Determinarea coeficienților binomiali
4. Calculul unor limite (regulile lui l'Hospital)
5. Studiul funcțiilor

Interpretarea geometrică a derivatei și diferențialei funcției



Regulile de calcul al diferențialelor

1. $\mathrm{d}(f+g)=\mathrm{d}f+\mathrm{d}g$
2. $\mathrm{d}(c\cdot f)=c\cdot\mathrm{d}f$
3. $\mathrm{d}(f-g)=\mathrm{d}f-\mathrm{d}g$
4. $\mathrm{d}(f\cdot g)=g\cdot\mathrm{d}f+f\cdot\mathrm{d}g$
5. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\cdot\mathrm{d}f-f\cdot\mathrm{d}g}{g^2}$
6. $\mathrm{d}f(g)=f'(g)\mathrm{d}g$

Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

1° Teorema lui Fermat

2° Teorema lui Rolle

3° Teorema lui Lagrange

Modulul

5 Aplicații ale derivatelor

Obiective

- aplicarea derivatei la determinarea intervalelor de monotonie şi a extremelor funcției;
- recunoaşterea şi utilizarea în diverse contexte a noțiunilor *punct critic*, *punct de extrem*, *extremele funcției*;
- *determinarea cu ajutorul derivatei a punctelor de inflexiune, a intervalelor de concavitate şi de convexitate ale graficului unei funcții;
- *recunoaşterea şi determinarea asimptotelor graficului funcției elementare studiate sau date;
- *aplicarea noțiunii *limita funcției* la determinarea asimptotelor graficului funcției;
- utilizarea metodelor ce țin de aplicațiile derivatei ca metode noi de studiere a funcției, de rezolvare a problemelor teoretice şi practice;
- aplicarea derivatelor la rezolvarea unor probleme de maxim şi minim din geometrie, fizică, economie.

În acest modul vom aplica derivatele de ordinul întîi şi *derivatele de ordinul doi la studiul variației funcțiilor, vom rezolva diverse probleme de geometrie, fizică şi din alte domenii, probleme care, în majoritatea cazurilor, nu pot fi rezolvate folosind metode elementare.

§1 Rolul derivatei întîi în studiul funcțiilor

1.1. Intervalele de monotonie ale unei funcții

În studiul variației unei funcții este important să cunoaştem în ce condiții funcția este constantă sau monotonă pe un interval dat. Am stabilit deja că derivata unei funcții constante pe un interval dat este egală cu zero. Va fi utilă şi reciproca acestei afirmații.

Teorema 1. Fie $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ o funcție derivabilă. Dacă derivata funcției f este egală cu zero pe un interval $I \subseteq E$, atunci funcția f este constantă pe acest interval.

Demonstrație

Fie $f'(x) = 0,\ \forall x \in I.$ Fixăm pe intervalul I un punct x_0 şi fie punctul $x \in I,\ \ x \neq x_0.$ Pe intervalul $[x_0, x]$ (sau pe $[x, x_0]$) funcția f satisface condițiile teoremei lui Lagrange (modulul 4, § 6, secvența 6.3). Conform acestei teoreme, există un punct c situat între x_0 şi x, astfel încît $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$ Deoarece $f'(c) = 0,$ din ipoteză, rezultă că $f(x) = f(x_0).$ Prin urmare, în orice punct $x \in I$ funcția f ia valoarea $f(x_0),$ adică funcția f este constantă pe I. ►

Corolar. Dacă f şi g sînt funcţii derivabile şi $f' = g'$ pe un interval I, atunci funcţiile f şi g diferă pe I printr-o constantă: $f(x) = g(x) + C, \ \forall x \in I, \ C \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie

Considerăm funcţia $\varphi = f - g$. Atunci $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, \ \forall x \in I$. Astfel, funcţia φ este constantă pe I şi, prin urmare, $f(x) = g(x) + C, \forall x \in I, \ C \in \mathbb{R}$. ►

Exerciţiu rezolvat

Să se determine intervalele pe care funcţiile f şi g diferă printr-o constantă şi să se afle această constantă:

a) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \cos 2x, \ g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 1$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \operatorname{arctg} x; \ \ g\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = -2\sin 2x$ şi $g'(x) = -2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x = -2\sin 2x$. Deci, funcţia f diferă de funcţia g printr-o constantă: $f(x) = g(x) + C$. Cum $f(0) = 1$ şi $g(0) = 2$, rezultă că $C = -1$ şi obţinem: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) Pe fiecare dintre intervalele $I_1 = (-\infty, -1), \ I_2 = (-1, 1)$ şi $I_3 = (1, +\infty)$, funcţiile f şi g au derivatele egale: $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Aşadar, pe fiecare dintre aceste intervale, funcţiile date diferă printr-o constantă: $f(x) - g(x) = C_1, \ \forall x \in I_1; \ f(x) - g(x) = C_2, \ \forall x \in I_2; \ f(x) - g(x) = C_3, \ \forall x \in I_3$. Pentru intervalul I_2 obţinem $C_2 = 0$ (ne convingem luînd $x = 0$), iar pentru intervalele I_1 şi I_3 avem $C_1 = -\frac{\pi}{2}$ şi respectiv $C_3 = \frac{\pi}{2}$, dacă, de exemplu, x tinde la $-\infty$ şi respectiv la $+\infty$.

Astfel, am obţinut: $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} - \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in (-\infty, -1); \ \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}, \ \forall x \in (-1, 1); \ \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} + \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in (1, +\infty)$.

Relaţiile obţinute pot fi demonstrate şi prin metode elementare, fără aplicarea derivatei.

Observaţie. În baza exerciţiului b), tragem concluzia că din faptul că funcţia f este definită pe reuniunea a două (sau mai multe) intervale disjuncte, $I_1, I_2, I_1 \cap I_2 = \varnothing$, şi $f'(x) = 0, \ \forall x \in I_1 \cup I_2$, încă nu rezultă că ea este constantă pe mulţimea $I_1 \cup I_2$.

De exemplu, funcţia $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, +\infty), \end{cases}$ are derivata nulă în fiecare punct al mulţimii $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, însă ea nu este constantă pe A.

Vom stabili acum *un criteriu important şi eficient de determinare a intervalelor de monotonie ale unei funcţii derivabile.*

Teorema 2. Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul I. Funcţia f este crescătoare (descrescătoare) pe I dacă şi numai dacă $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.

Demonstrație

Necesitatea. Presupunem că funcția f este crescătoare pe I. Atunci $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, $\forall x, x_0 \in I,\ x\neq x_0$. Fixînd $x_0\in I$ şi trecînd în acest raport la limită cînd $x\to x_0$, obținem că $f'(x_0)\geq 0,\ \forall x_0\in I$.

Raționament similar se face şi în cazul în care f este o funcție descrescătoare pe intervalul I.

Suficiența. Să considerăm punctele arbitrare $x_1, x_2\in I,\ x_1<x_2$, şi fie $f'(x)\geq 0$ pe I. Aplicînd funcției f teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$, obținem că $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, unde $c\in(x_1, x_2)$ şi $f'(c)\geq 0$. Cum $x_2-x_1>0$, rezultă că $f(x_2)-f(x_1)\geq 0$, adică $f(x_2)\geq f(x_1)$. Deci, funcția f este crescătoare pe I.

Analog, dacă $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in I$, obținem că funcția f este descrescătoare pe I. ▶

Observații. **1.** Dacă $f'(x)>0,\ \forall x\in I$, atunci funcția f este strict crescătoare pe I.

2. Dacă $f'(x)<0,\ \forall x\in I$, atunci funcția f este strict descrescătoare pe I.

3. Din faptul că funcția f este strict crescătoare (strict descrescătoare) pe I nu rezultă că f' nu se anulează în nici un punct din I. De exemplu, funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, însă $f'(0)=0$.

Concluzie. O funcție derivabilă este strict monotonă pe intervalele pe care derivata sa îşi păstrează semnul. Prin urmare, pentru a stabili intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile, determinăm intervalele pe care derivata sa îşi păstrează semnul.

Exemple

1. Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+2x$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deoarece $f'(x)=3x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+1$, este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, întrucît $f'(x)=2x-1<0,\ \forall x\in\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ şi $f'(x)>0$, $\forall x\in\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

1.2. Puncte de extrem ale unei funcții

Reamintim!

Definiții. Fie funcția $f\colon I\to\mathbb{R}\ (I\subseteq\mathbb{R})$.

• Punctul $x_0\in I$ se numeşte **punct de maxim local** al funcției f dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0, astfel încît $f(x)\leq f(x_0),\ \forall x\in V(x_0)\cap I$. În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numeşte **maxim local** al funcției f în punctul x_0.

• Punctul $x_0\in I$ se numeşte **punct de minim local** al funcției f dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0, astfel încît $f(x_0)\leq f(x),\ \forall x\in V(x_0)\cap I$. În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numeşte **minim local** al funcției f în punctul x_0.

• Punctele de maxim local şi de minim local ale funcţiei f se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcţii.

• Valorile funcţiei f în punctele ei de extrem local se numesc **extremele locale** ale acestei funcţii.

Definiţii. Fie funcţia $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$.

• Punctul $x_0 \in I$ se numeşte **punct de maxim global** al funcţiei f pe I dacă $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in I$, iar valoarea $f(x_0)$ se numeşte **maximul global** al funcţiei f pe I.

• Punctul $x_0 \in I$ se numeşte **punct de minim global** al funcţiei f pe I dacă $f(x_0) \le f(x)$, $\forall x \in I$, iar valoarea $f(x_0)$ se numeşte **minimul global** al funcţiei f pe I.

• Punctele de maxim global şi de minim global ale unei funcţii se numesc **puncte de extrem global** ale acestei funcţii.

• Valorile funcţiei f în punctele ei de extrem global se numesc **extremele globale** ale acestei funcţii.

Observaţii. **1.** Un punct de maxim (minim) local nu este în mod necesar un punct de maxim (minim) global. Un punct de maxim (minim) global este totodată şi un punct de maxim (minim) local.

2. Este posibil ca un minim local al unei funcţii să fie mai mare decît un maxim local al aceleiaşi funcţii.

De exemplu, funcţia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ (fig. 5.1) are în punctul x_1 un minim local mai mare decît maximul local din punctul x_4.

3. Dacă funcţia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul $[a, b]$, atunci, conform teoremei lui Weierstrass, funcţia f îşi atinge pe acest interval marginile $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, care sînt extremele globale ale funcţiei f pe intervalul $[a, b]$.

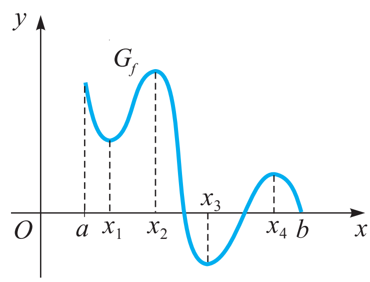


Fig. 5.1

Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul deschis I. Din teorema lui Fermat rezultă că dacă $x_0 \in I$ este un punct de extrem local al funcţiei f, atunci $f'(x_0) = 0$. Astfel, teorema lui Fermat pune în evidenţă faptul că *derivata unei funcţii se anulează în orice punct de extrem local al intervalului deschis I.*

Concluzii. Fie funcţia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I şi $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in I$.

1. Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, şi $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este punct de maxim local al funcţiei f. Se notează: $\nearrow f(x_0) \searrow$. Semnul $\nearrow$ ($\searrow$) semnifică faptul că funcţia este monoton crescătoare (descrescătoare) pe intervalul respectiv.
2. Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, şi $f'(x) > 0$, $\forall x \in I, x > x_0$, atunci x_0 este punct de minim local al funcţiei f. Se notează: $\searrow f(x_0) \nearrow$.

3. Dacă derivata funcției f are același semn la stînga și la dreapta lui x_0, atunci x_0 nu este punct de extrem local al acestei funcții.

Definiție. Fie funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I. Punctele din intervalul I în care f' ia valoarea zero se numesc **puncte critice** (sau **staționare**) ale funcției f.

Observație. Concluziile 1–3 rămîn adevărate și în cazul în care funcția f fiind continuă în punctul x_0 nu este derivabilă în x_0. Astfel de puncte de asemenea se numesc ***puncte critice*** (***staționare***) ale funcției f.

De exemplu, funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$, însă 0 este punct de minim local al acestei funcții.

Într-adevăr, $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$ și în punctul $x_0 = 0$ derivata își schimbă semnul din „–” în „+”.

Intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale unei funcții derivabile pe un interval deschis sau pe o reuniune de intervale deschise pot fi determinate aplicînd următorul *algoritm*:

① Se calculează f'.

② Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$; soluțiile acestei ecuații (zerourile funcției f', precum și punctele în care f nu este derivabilă) sînt eventualele puncte de extrem local ale funcției f.

③ Se determină semnul funcției f' pe intervalele pe care ea nu se anulează.

④ Se stabilesc intervalele pe care funcția f' își păstrează semnul, acestea fiind intervalele de monotonie ale funcției f.

⑤ Se determină punctele de extrem local și extremele locale ale funcției f.

Exerciții rezolvate

1. Să se studieze monotonia funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$.

Rezolvare:

$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$. Observăm că derivata funcției f este pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, f este strict crescătoare pe tot domeniul ei de definiție $\mathbb{R}$.

2. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 9x^2$.

Rezolvare:

$f'(x) = 3x^2 + 18x = 3x(x+6)$. Punctele critice ale funcției f sînt -6 și 0.

Constatăm că:

- $f'(x) > 0$ pe intervalele $(-\infty, -6)$, $(0, +\infty)$, prin urmare, în baza observației 1 (secvența 1.1), funcția f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -6]$, $[0, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ pe intervalul $(-6, 0)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[-6, 0]$.

Rezultatele acestui studiu pot fi trecute în aşa-numitul ***tablou*** (***tabel***) ***de variaţie al funcţiei***. Pe *linia întîi* a acestui tablou se indică domeniul de definiţie al funcţiei şi punctele în care derivata ei se anulează sau nu există. Pe *linia a doua* se scriu semnele funcţiei f' pe intervalele unde ea nu se anulează. Pe *ultima linie* se indică creşterea ($\nearrow$), descreşterea ($\searrow$) funcţiei, precum şi extremele ei locale.

Obţinem tabloul de variaţie al funcţiei f:

x	$-\infty$		-6		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	108	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Aşadar, -6 este punct de maxim local al funcţiei f şi $f(-6)=108$ este maximul ei local, iar 0 este punct de minim local al funcţiei f şi $f(0)=0$ este minimul ei local.

3. Fie funcţia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x$. Să se stabilească intervalele de monotonie, punctele de extrem local şi extremele locale ale funcţiei f.

Rezolvare:

$f'(x)=e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$. Derivata funcţiei f nu se anulează pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$. Pe primul interval $f'(x)<0$, iar pe al doilea $f'(x)>0$. Deci, pe $(-\infty, 0]$ funcţia f este strict descrescătoare, iar pe $[0, +\infty)$ – strict crescătoare. Punctul $x_0=0$ este punct de minim local al funcţiei f şi $f(0)=e^0=1$ este minimul ei local.

Tabloul de variaţie al funcţiei f este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

4. Să se studieze monotonia funcţiei $f\colon (0, +\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x - x$.

Rezolvare:

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Derivata funcţiei f nu se anulează pe intervalele $(0, 1)$ şi $(1, +\infty)$. Avem $f'(x)>0,\ \forall x\in(0,1)$, şi $f'(x)<0,\ \forall x\in(1, +\infty)$.

Alcătuim tabloul de variaţie al funcţiei f:

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

Pe intervalul $(0, 1]$ funcţia f este strict crescătoare, iar pe intervalul $[1, +\infty)$ – strict descrescătoare. Prin urmare, 1 este punct de maxim local al funcţiei f şi $f(1)=-1$ este maximul ei local.

Observaţie. Cunoscînd tabloul de variaţie al unei funcţii, pot fi stabilite inegalităţi de tipul $f_1(x)\ge f_2(x),\ x\in E$. Pentru aceasta, studiem variaţia şi semnul funcţiei diferenţă $f\colon E\to\mathbb{R},\ f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

Exerciţiu rezolvat

Să se arate că pentru orice $x>-1$ este adevărată inegalitatea $\ln(1+x)\le x$.

Rezolvare:

Considerăm funcţia f definită prin diferenţa expresiilor din cei doi membri: $f\colon (-1, +\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)-x$. Studiem variaţia acestei funcţii cu ajutorul derivatei. Avem $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$.

Tabloul de variație al funcției f este:

x	-1		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Deoarece maximul funcției este 0, rezultă că funcția este negativă pe $(-1, +\infty)$, adică $\ln(1+x) - x \le 0$.

Aşadar, $\ln(1+x) \le x$ şi egalitatea are loc numai pentru $x = 0$.

1.3. Determinarea extremelor globale

Fie funcția $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă pe (a, b) şi continuă pe $[a, b]$. În baza teoremei Weierstrass, funcția f îşi atinge marginile sale pe $[a, b]$, adică există punctele $x_1, x_2 \in [a, b]$, astfel încît $f(x_1) = \inf\limits_{x\in[a,\,b]} f(x) = m$, $f(x_2) = \sup\limits_{x\in[a,\,b]} f(x) = M$. Dacă punctul x_1 (x_2) este situat în interiorul intervalului $[a, b]$, atunci în acest punct, conform teoremei lui Fermat, funcția f are un minim (maxim) local, şi deci $f'(x_1) = 0$ $(f'(x_2) = 0)$. Însă marginile m şi M pot fi atinse de funcția f şi la extremitățile intervalului $[a, b]$.

De exemplu, funcția $f\colon \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, îşi atinge cea mai mare valoare a sa, $M = 1$, în punctul 0.

Extremele globale ale unei funcții continue $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ şi derivabile pe (a, b) pot fi determinate aplicînd următorul *algoritm*:

① Se află valorile funcției f la capetele intervalului $[a, b]$, $f(a)$ şi $f(b)$.

② Se află punctele critice ale funcției f, adică se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$.

③ Se calculează valorile funcției f în punctele critice deja determinate şi se compară cu valorile acesteia la capetele intervalului: cea mai mică (mare) dintre aceste valori va fi minimul (maximul) global al funcției f pe $[a, b]$.

Exercițiu rezolvat

Să se determine, pe intervalul indicat, extremele locale şi extremele globale ale funcției $f\colon I \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 + 2x - 10$, $I = [-1, 5]$; b) $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $I = [-3, 10]$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, $\forall x \in [-1, 5]$. Astfel, funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[-1, 5]$. În acest caz, $m = f(-1) = -13$, $M = f(5) = 5^3 + 2\cdot 5 - 10 = 125$.

b) $f'(x) = 2x - 4$, $\forall x \in [-3, 10]$. Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ şi aflăm punctele critice ale funcției f: $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. În punctul 2, funcția f are un minim local şi $f(2) = 2$.

Deci, $m = \min[f(-3), f(2), f(10)] = \min[27, 2, 66] = 2$,

$M = \max[f(-3), f(2), f(10)] = \max[27, 2, 66] = 66$ sînt extremele globale ale funcției f.

Observație. Dacă funcția derivabilă f este definită pe intervalul $I = (a, b)$, finit sau infinit, atunci în algoritmul anterior valorile $f(a)$ şi $f(b)$ se vor înlocui cu $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ şi respectiv $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$. Se calculează marginile $m = \inf\limits_{x\in I} f(x)$ şi $M = \sup\limits_{x\in I} f(x)$ care, în general, nu sînt atinse de funcția f.

Exerciţiu rezolvat

Să se determine marginile funcţiei:

a) $f\colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x - x$; b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = e^x - 1 < 0,\ \forall x \in (-\infty, 0)$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Prin urmare, $m = \inf\limits_{x\in(-\infty,\,0)} f(x) = 1,\ M = \sup\limits_{x\in(-\infty,\,0)} f(x) = +\infty$ şi aceste valori nu sînt atinse de funcţia f.

b) $f'(x) = \dfrac{3 - x^2 - 2x}{x^2+3} = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 1$.

$f(-3) = -\dfrac{1}{6},\ f(1) = \dfrac{1}{2},\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Deci, $m = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\left\{-\dfrac{1}{6},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right\} = -\dfrac{1}{6},\ M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \max\left\{-\dfrac{1}{6},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}$ şi aceste valori sînt atinse de funcţia f.

Exerciţii propuse

A

1. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale şi să se alcătuiască tabloul de variaţie al funcţiei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 3x$; b) $f(x) = x^4 - 3$; c) $f(x) = x^4 - 4x$;

d) $f(x) = x^3 - 12x$; e) $f(x) = (x-1)^3(2x+3)^2$; f) $f(x) = 2 + x - x^2$.

2. Să se afle punctele de extrem local şi extremele locale ale funcţiei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$; b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$; c) $f(x) = (x^3 - 10)(x+5)^2$;

d) $f(x) = x^3 - 6x$; e) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; f) $f(x) = 2x^3 + 2x - 5$.

3. Să se determine, pe intervalul indicat, extremele globale ale funcţiei $f\colon I \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9,\ I = [-1, 2]$; b) $f(x) = x^3 - x,\ I = [0, 5]$.

B

4. Aplicînd derivata, să se arate că funcţiile f, g diferă printr-o constantă şi să se determine constanta respectivă:

a) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin 2x,\ g(x) = 1 + 2\sin x\cos x$;

b) $f, g\colon (-\infty, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x,\ g(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{1-x}$;

c) $f, g\colon (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin x,\ g(x) = -\arccos x$.

5. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale şi să se completeze tabloul de variaţie al funcţiei $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$; b) $f(x) = x^2 \ln x$; c) $f(x) = e^{\frac{1}{(x-3)}}$;

d) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x$; e) $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; f) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 - 1}$.

6. Pentru care valori ale parametrului real a funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=ax-\ln(1+x^2)$; b) $f(x)=\operatorname{arctg} ax+x$; c) $f(x)=ax-\sin x$?

7. Să se afle punctele de extrem local şi extremele locale ale funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$; b) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$; c) $f(x)=x-2\operatorname{arctg} x$;

d) $f(x)=(x-1)e^{3x}$; e) $f(x)=x^4e^{-x^2}$; f) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

g) $f(x)=|x-1|\sqrt[3]{x+2}$; h) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } x\le 0\\ x\ln x, \text{ dacă } x>0;\end{cases}$ i) $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

8. Să se determine, pe intervalul indicat, extremele locale şi extremele globale ale funcției $f\colon I\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^4-8x^2+3,\ I=[-1, 2]$; b) $f(x)=\sin x+\cos^2 x,\ I=[0, \pi]$;

c) $f(x)=x-2\ln x,\ I=(0, e]$.

9. Să se demonstreze inegalitatea:

a) $(1+x)^\alpha\ge 1+\alpha x,\ \forall x\ge -1,\ \forall \alpha>1$; b) $\ln(1+x)^2<x,\ \forall x>0$.

§2 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor. Asimptote

Am stabilit deja ce informații pot fi obținute despre comportarea unei funcții derivabile cunoscînd derivata ei, mai precis, zerourile şi semnul derivatei. Însă simpla cunoaştere a faptului că o funcție f este, de exemplu, strict crescătoare pe un interval I nu este suficientă pentru a stabili forma graficului acesteia. De exemplu, funcția f, definită pe $[0, +\infty)$ prin formula $f(x)=\sqrt{x}$, este strict crescătoare pe acest interval, însă această informație este insuficientă pentru a decide dacă graficul funcției f are forma curbei color sau a curbei de culoare neagră (fig. 5.2).

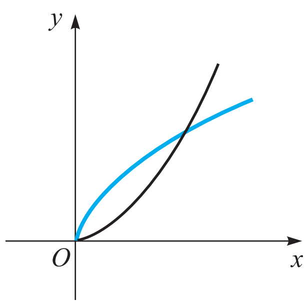


Fig. 5.2

Forma graficului unei funcții poate fi determinată cu ajutorul derivatei a doua.

2.1. Convexitate şi concavitate

Fie $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ o funcție derivabilă pe intervalul deschis I. Presupunem că tangenta în orice punct al graficului funcției f se află sub grafic (fig. 5.3 a)) sau deasupra lui (fig. 5.3 b)).

În cazul a) se spune că graficul funcției f este o *curbă convexă*, iar în cazul b) – o *curbă concavă*.

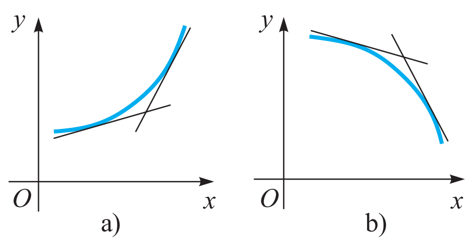


Fig. 5.3

Vom formula o definiție riguroasă a convexității (concavității) şi vom arăta că derivata a doua, dacă există, furnizează informații concrete în această privință.

Fie funcția $f: I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I şi $x_0 \in I$. Tangenta la graficul funcției f în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este dreapta de ecuație

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Fie funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Graficul funcției F este tangenta M_0T (fig. 5.4).

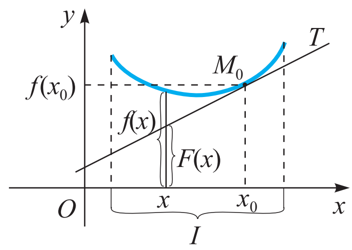


Fig. 5.4

Se spune că tangenta M_0T se află ***sub graficul funcției f*** dacă

$$F(x) \le f(x) \quad \forall x \in I. \qquad (1)$$

Se spune că tangenta M_0T se află ***deasupra graficului funcției f*** dacă

$$F(x) \ge f(x) \quad \forall x \in I. \qquad (2)$$

Dacă inegalitatea (1) (inegalitatea (2)) este strictă pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$, se spune că tangenta M_0T se află ***strict sub graficul funcției f*** (***strict deasupra graficului lui f***).

Definiții. • Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ se numeşte **convexă** (**strict convexă**) pe intervalul I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției f se află sub (strict sub) acest grafic.

• Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ se numeşte **concavă** (**strict concavă**) pe intervalul I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției f se află deasupra (strict deasupra) acestui grafic.

• Vom spune că graficul funcției f este o **curbă convexă** (**strict convexă**) sau o **curbă concavă** (**strict concavă**) pe intervalul I dacă funcția f posedă proprietatea respectivă pe acest interval.

***Observații.* 1.** Definiția convexității graficului unei funcții poate fi formulată şi astfel: pentru orice coardă AB cu abscisele aparținînd intervalului I, porțiunea graficului care uneşte punctele A şi B este situată sub această coardă (fig. 5.5).

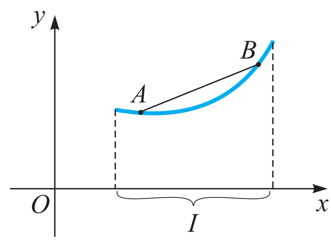


Fig. 5.5

2. Funcția f este concavă pe intervalul I dacă şi numai dacă funcția $-f$ este convexă pe I.

3. Uneori se mai spune că funcțiile convexe au „concavitatea în sus” (graficul lor „ține apa”, fig. 5.6 a)), iar funcțiile concave au „concavitatea în jos” (graficul lor „nu ține apa”, fig. 5.6 b)).

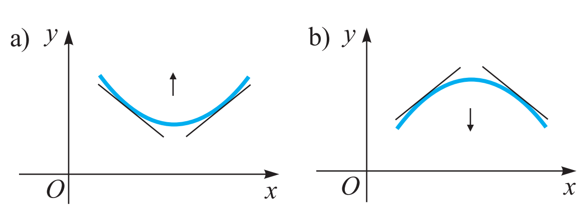


Fig. 5.6

Studiul concavității/convexității în baza definiției este dificil chiar în cazul funcțiilor elementare. Pentru funcțiile derivabile de două ori, determinarea intervalelor de concavitate/convexitate se reduce la studiul semnului derivatei a doua.

Teorema 3. Dacă funcția $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă pe (a, b) şi $f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci această funcție este convexă pe acest interval.

Înlocuind f cu $-f$ şi ținînd cont de observația 2, obținem următorul

Corolar. Fie $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe (a, b). Dacă $f''(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci funcția f este concavă pe (a, b).

Observație. Dacă $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, $\forall x \in (a, b)$, atunci funcția f este strict convexă (strict concavă) pe (a, b).

Exercițiu rezolvat

Să se determine intervalele de concavitate şi de convexitate ale funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; b) $f(x) = x^3$.

Rezolvare:

a) Funcția f satisface condițiile teoremei 3 şi $f''(x) = 2a$. Aşadar, funcția f este strict convexă pe $\mathbb{R}$, dacă $a > 0$, şi strict concavă pe $\mathbb{R}$, dacă $a < 0$.

b) $f''(x) = 6x$. Prin urmare, funcția f este strict concavă pe $(-\infty, 0)$ şi strict convexă pe $(0, +\infty)$.

2.2. Determinarea intervalelor de concavitate, convexitate. Puncte de inflexiune

Fie funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I şi $x_0 \in I$ un punct critic al funcției f, adică $f'(x_0) = 0$. Am stabilit deja că dacă funcția f' are semne diferite la stînga şi la dreapta punctului x_0, atunci x_0 este punct de extrem local al funcției f. Există însă cazuri în care este dificil de a stabili semnul derivatei la stînga şi la dreapta punctelor critice. În aceste situații vom aplica următorul *criteriu suficient pentru extrem*, fără a mai studia semnul funcției f', cu condiția că funcția f este de două ori derivabilă pe I.

Teorema 4. Dacă $x_0 \in (a, b)$ este un punct critic al funcției $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe (a, b) şi dacă $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, atunci x_0 este un punct de minim local (maxim local) al funcției f.

Exercițiu rezolvat

Să se determine punctele de extrem local şi extremele locale ale funcției definite prin expresia $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

Rezolvare:

Calculăm derivatele de ordinele unu şi doi: $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$ şi $f''(x) = 6x + 12$. Funcția f' se anulează în punctele $x_1 = -3$ şi $x_2 = -1$. Cum $f''(-3) = -6 < 0$ şi

$f''(-1)=6>0$, în baza teoremei 4 deducem că $x_1=-3$ este punct de maxim local al funcției f şi $f(-3)=0$ este maximul ei local, iar $x_2=-1$ este punct de minim local al funcției f şi $f(-1)=-4$ este minimul ei local.

Dacă funcția f este de două ori derivabilă în vecinătatea punctului x_0 în care $f''(x_0)=0$ şi dacă funcția f'' are semne diferite la stînga şi la dreapta punctului x_0, atunci funcția f îşi schimbă concavitatea în acest punct. De exemplu, dacă $f''(x)>0$ pentru $x<x_0$ şi $f''(x)<0$ pentru $x>x_0$ (x aparține unei vecinătăți a punctului x_0), atunci funcția f este convexă la stînga lui x_0 şi concavă la dreapta lui x_0.

Definiție. Fie $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe (a, b). Punctul $x_0\in(a,b)$ se numeşte **punct de inflexiune al funcției *f*** dacă există o vecinătate $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, astfel încît funcția f este convexă pe $(x_0-\delta, x_0)$ şi concavă pe $(x_0, x_0+\delta)$ sau invers (fig. 5.7).

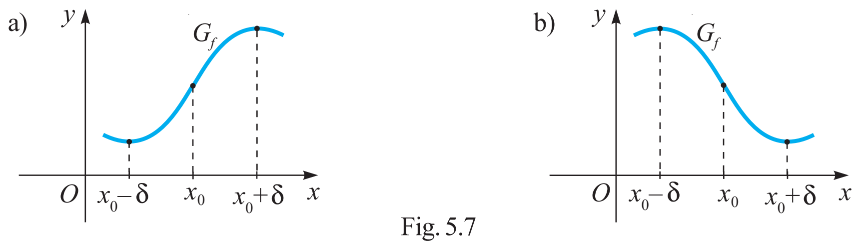


Fig. 5.7

Observație. Dacă x_0 este un punct de inflexiune al funcției f, atunci $M_0(x_0, f(x_0))$ se numeşte **punct de inflexiune pentru graficul** acestei funcții.

Teorema 5. Fie $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate $V(x_0)$ a punctului $x_0\in(a,b)$ şi $f''(x_0)=0$. Dacă $f''(x)<0$, $\forall x\in V(x_0)$, $x<x_0$, şi $f''(x)>0$, $\forall x\in V(x_0)$, $x>x_0$, sau invers (dacă $f''(x)>0$, $\forall x\in V(x_0)$, $x<x_0$, şi $f''(x)<0$, $\forall x\in V(x_0)$, $x>x_0$), atunci x_0 este punct de inflexiune al funcției f.

Remarcăm: condiția $f''(x_0)=0$ nu implică faptul că x_0 este punct de inflexiune al funcției f, după cum condiția $f'(x_0)=0$ nu implică faptul că x_0 este punct de extrem local al funcției f.

Intervalele de convexitate, de concavitate şi punctele de inflexiune ale unei funcții f de două ori derivabilă pe un interval pot fi determinate aplicînd următorul *algoritm*:

① Se calculează f'' şi se rezolvă ecuația $f''(x)=0$ (unele dintre soluțiile acestei ecuații pot fi puncte de inflexiune ale funcției f).

② Se stabilesc intervalele pe care funcția f'' are semn constant, acestea fiind intervalele de convexitate sau de concavitate ale funcției f.

③ Se determină punctele de inflexiune ale funcției f.

Observație. Dacă în punctul x_0 nu există f'' sau f'' este infinită, atunci acest punct de asemenea este un eventual punct de inflexiune al funcției f.

Exercițiu rezolvat

Să se determine extremele locale, punctele de inflexiune, intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției: a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$;
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 4x + 6)e^{-x}$;
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = 3x(x-2)$, deci funcția f are două puncte critice: $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$. Cum $f''(x) = 6(x-1)$, rezultă că $f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$. Astfel, $x_1 = 0$ este punct de maxim local, iar $x_2 = 2$ este punct de minim local al funcției f. Semnul funcției f'' este indicat în tabloul de variație al funcției f:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Așadar, funcția f este concavă pe $(-\infty, 1)$ și convexă pe $(1, +\infty)$, iar 1 este un punct de inflexiune.

b) $f'(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ și $f''(x) = x^2 e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții în $\mathbb{R}$. Cum funcția f' este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f'(0) = -2$, rezultă că $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Astfel, funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x_1 = 0$. Punctul 0 nu este punct de inflexiune al funcției f, deoarece $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Prin urmare, graficul funcției f este convex pe $\mathbb{R}$.

c) $f'(x) = 2|x|$, $f'(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, deci funcția f este strict crescătoare. $f''(x) = -2$ pentru $x < 0$, $f''(x) = 2$ pentru $x > 0$ și f'' nu există în punctul $x = 0$. Astfel, funcția f este concavă pe $(-\infty, 0)$ și convexă pe $(0, +\infty)$, iar punctul $x = 0$ este punct de inflexiune.

2.3. Asimptote

Fie f o funcție definită pe mulțimea E, care este un interval sau o reuniune (finită sau infinită) de intervale. Dacă mulțimea E este nemărginită sau funcția f este nemărginită, atunci graficul ei este o mulțime nemărginită de puncte din plan (în sensul că nu există nici un dreptunghi care să conțină integral acest grafic). În acest caz, vom spune că graficul funcției f are *ramuri nemărginite*.

Dacă o ramură nemărginită a graficului funcției f se apropie oricît de mult de o dreaptă dată, se spune că această dreaptă este *o asimptotă a graficului (pentru graficul) funcției f*. Graficul unei funcții poate avea *asimptote orizontale, oblice, verticale*.

2.3.1. Asimptote orizontale

Considerăm o funcție $f\colon E \to \mathbb{R}$, unde mulțimea E conține un interval de forma $(a, +\infty)$ sau $+\infty$ este punct de acumulare pentru E. În acest caz, graficul funcției f are o ramură nemărginită. Fie l ($l \in \mathbb{R}$) un număr și considerăm dreapta de ecuație $y = l$ (paralelă cu axa Ox). Pentru orice număr $x \in (a, +\infty)$, notăm prin P (prin Q) punctul de abscisă x situat pe dreapta de ecuație $y = l$ (respectiv pe graficul funcției f) (fig. 5.8).

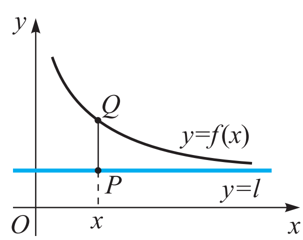


Fig. 5.8

Definiție. Dreapta de ecuație $y=l$ se numește **asimptotă orizontală la** $+\infty$ a graficului funcției f (a funcției f) dacă lungimea segmentului $PQ=|f(x)-l|$ tinde la zero cînd $x\to+\infty$, adică $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-l|=0.$

Această condiție este echivalentă cu faptul că $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ există şi că $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l.$

O definiție similară poate fi formulată şi pentru asimptota orizontală la $-\infty$ a graficului funcției f în cazul în care mulțimea E conține un interval de forma $(-\infty,\ a)$ sau $-\infty$ este punct de acumulare pentru E (fig. 5.9).

Dacă limita $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x))$ nu există sau este infinită, atunci graficul funcției f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$ (respectiv la $-\infty$).

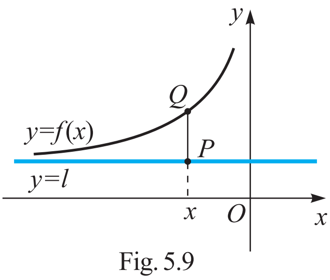


Fig. 5.9

Exercițiu rezolvat

Să se determine asimptotele orizontale ale graficului funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$; b) $f(x)=2^x$;

c) $f(x)=e^{x^2}$; d*) $f(x)=x\sin x$.

Rezolvare:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$ Prin urmare, dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ şi la $-\infty$ a graficului funcției f.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0.$ Deci, dreapta de ecuație $y=0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală la $-\infty$ a graficului funcției f. Deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x=+\infty$, rezultă că graficul funcției f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2}=+\infty$, rezultă că graficul funcției f nu are asimptote orizontale.

d*) Graficul funcției f nu are asimptote orizontale nici la $+\infty$, nici la $-\infty$, deoarece nu există limitele $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin x$.

2.3.2. Asimptote oblice

Fie funcția $f\colon E\to\mathbb{R}$, unde mulțimea E conține un interval de forma $(a,\ +\infty)$ (sau $+\infty$ este punct de acumulare pentru E), şi dreapta de ecuație $y=mx+n$, $m\neq 0$. Pentru orice $x\in(a,\ +\infty)$ notăm prin P (prin Q) punctul de abscisă x situat pe dreapta de ecuație $y=mx+n$, $m\neq 0$ (respectiv pe graficul funcției f) (fig. 5.10).

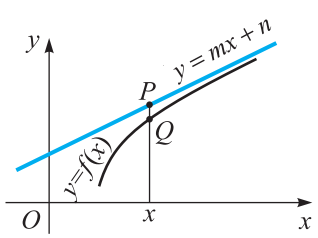


Fig. 5.10

Definiție. Dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, se numeşte **asimptotă oblică la** $+\infty$ a graficului funcției f (a funcției f) dacă lungimea segmentului $PQ = |f(x) - (mx+n)|$ tinde la zero cînd $x \to +\infty$, adică $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (mx+n)) = 0$.

Teorema 6. Dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, este asimptotă oblică la $+\infty$ a graficului funcției $f\colon E \to \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ $(m \neq 0)$ şi $n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$.

Fie mulțimea E conține un interval de forma $(-\infty, a)$ sau $-\infty$ este punct de acumulare pentru E. În mod similar se defineşte noțiunea *asimptotă oblică la* $-\infty$ a graficului funcției f şi se formulează teorema 6 pentru astfel de asimptote.

Exercițiu rezolvat

Să se determine asimptota oblică a graficului funcției:

a) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$; b) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{|x-1|}$;

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Rezolvare:

a) $m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x+1)} = 1$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - x\right) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x-1} = -1$. Aşadar, dreapta de ecuație $y = x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ şi la $-\infty$ a graficului funcției f.

b) $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x-1)} = 1$ şi $n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{|x-1|} - x\right) =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1$. Prin urmare, dreapta de ecuație $y = x + 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ a graficului funcției f. În mod similar, dacă $x \to -\infty$, obținem că dreapta de ecuație $y = -x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$ a graficului funcției f.

c) Graficul funcției f nu are asimptote oblice nici la $+\infty$, nici la $-\infty$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$, însă nu există limitele $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$.

2.3.3. Asimptote verticale

Exemple

1. Considerăm funcția $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (fig. 5.11). Observăm că $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ şi, prin urmare, dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală pentru graficul funcției f. Din lectura graficului funcției f rezultă că dacă x tinde la zero, punctul $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$, $x > 0$,

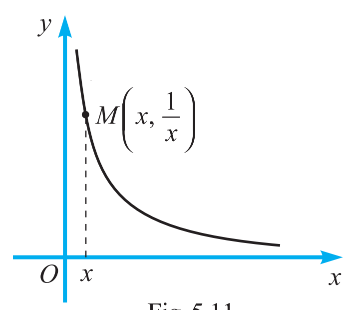


Fig. 5.11

al graficului, de abscisă x, se apropie de axa Oy. În acest caz spunem că graficul funcției f are *asimptotă verticală* axa Oy, adică dreapta de ecuație $x=0$.

2. Fie funcția $f\colon (0, 1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}$ (fig. 5.12).

Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x(1-x)}=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

Dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$ sînt asimptote verticale ale graficului funcției f.

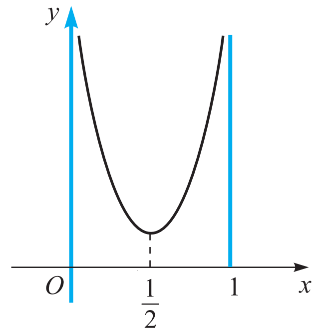


Fig. 5.12

Vom formula riguros termenul *asimptotă verticală*.

Fie funcția $f\colon E\to\mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare pentru mulțimea E.

Definiții. • Dacă limita la stînga $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ este $+\infty$ sau $-\infty$, se spune că dreapta de ecuație $x=a$ este **asimptotă verticală la stînga** pentru graficul funcției f (pentru funcția f).

• Dacă limita la dreapta $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ este $+\infty$ sau $-\infty$, se spune că dreapta de ecuație $x=a$ este **asimptotă verticală la dreapta** pentru graficul funcției f.

• Dreapta de ecuație $x=a$ este **asimptotă verticală** pentru graficul funcției f dacă ea este asimptotă verticală la stînga, la dreapta sau de ambele părți.

Dacă dreapta de ecuație $x=a$ este asimptotă verticală la stînga pentru graficul funcției f, atunci lungimea segmentului PQ tinde la zero cînd $x\to a-0$, iar ordonata punctului Q tinde la $-\infty$ (fig. 5.13 a)) sau la $+\infty$ (fig. 5.13 b)).

O interpretare geometrică similară se obține şi pentru asimptota verticală la dreapta pentru graficul funcției f. (Ilustrați!)

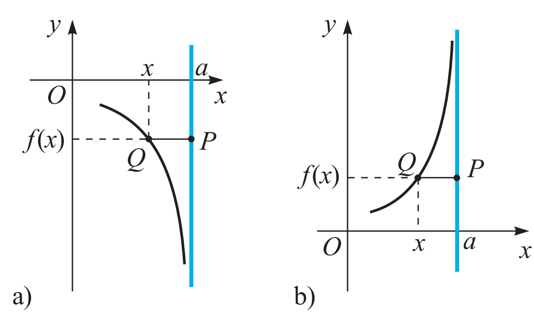


Fig. 5.13

Observație. Din definiție conchidem că asimptotele verticale ale graficului unei funcții $f\colon E\to\mathbb{R}$ se vor căuta printre dreptele de ecuații $x=x_i$, unde x_i sînt punctele de discontinuitate de speța a doua şi/sau punctele de acumulare finite pentru mulțimea E care nu aparțin lui E.

În particular, dacă $E=(a, b)$ şi funcția f este continuă pe (a, b), atunci dreapta de ecuație $x=a$ $(x=b)$ este asimptotă verticală la graficul funcției f dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ (respectiv $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$).

Exercițiu rezolvat

Să se determine asimptotele verticale ale graficului funcției:

a) $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; b) $f\colon \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x$.

Rezolvare:

a) Cum funcția f este continuă pe $(-1, 1)$, eventualele asimptote verticale pentru graficul funcției f sînt dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = -1$.

Calculăm: $l_s(1) = \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1}{x^2 - 1} = -\infty$, $l_d(-1) = \lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{1}{x^2 - 1} = -\infty$. Prin urmare, dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = -1$ sînt asimptote verticale ale graficului funcției f.

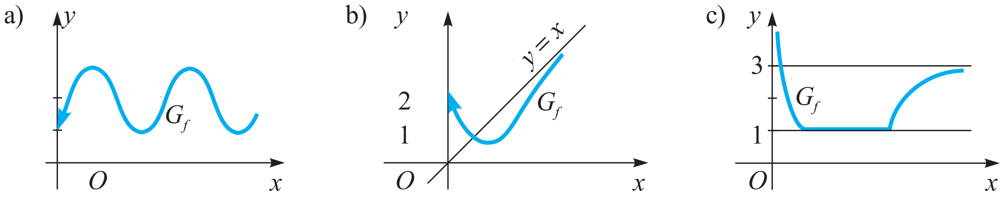
b) Am stabilit (modulul 2) că $l_s\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty$ și $l_d\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Deci, dreptele de ecuații $x = \dfrac{\pi}{2}$ și $x = -\dfrac{\pi}{2}$ sînt asimptote verticale pentru graficul funcției f.

Exerciții propuse

B

1. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$:



2. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției:

a) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$; b) $f\colon (-2, 2) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$;

c) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$; d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

3. Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$; b) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$; c) $f(x) = \sin x$;

d) $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$; e) $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$;

f) $f(x) = x^2 \ln x$; g) $f(x) = x \sin(\ln x)$.

4. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}\ (a > 0)$; d) $f(x) = x + \sin x$;

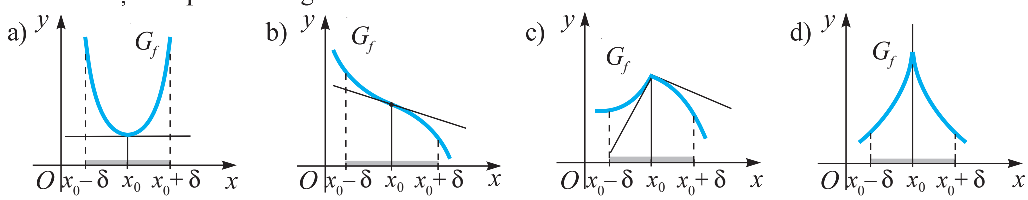
e) $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$; f) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; g) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$.

5. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{|x|}}$; b) $f(x)=x^2+\sin x$; c) $f(x)=e^{\frac{1}{|x|}}$;

d) $f(x)=\dfrac{x^4+2}{x(x-1)(x+1)}$; e) $f(x)=\dfrac{x-9}{|x|+2}$; f) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$.

6. Fie funcțiile reprezentate grafic:



Pentru fiecare funcție să se transcrie și să se completeze tabloul de variație:

x	$x_0-\delta$	x_0	$x_0+\delta$
f'			
f''			
f			

7. Să se scrie o funcție al cărei grafic are asimptote verticale dreptele de ecuație $x_k=k,\ k\in\mathbb{Z}$.

§3 Reprezentarea grafică a funcțiilor

A reprezenta grafic o funcție $f\colon E\to\mathbb{R}$ înseamnă a trasa (a desena) graficul ei $G_f=\{(x, f(x))\,|\,x\in E\}$ într-un sistem de axe ortogonale xOy. Pentru trasarea graficului funcției f recomandăm parcurgerea următoarelor etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice funcției date.

I. Domeniul de definiție al funcției. Dacă domeniul de definiție al funcției f nu este specificat, se *subînțelege* că este indicat domeniul ei maxim de definiție, format din mulțimea $D\subseteq\mathbb{R}$, pentru care $f(x)$, $x\in D$, are sens. În probleme cu conținut fizic, economic, geometric etc. pot fi restricții suplimentare referitoare la domeniul respectiv de definiție (studiu).

După ce a fost determinat domeniul de definiție al funcției f, se află punctele de intersecție a graficului ei cu axele de coordonate: cu axa Ox $(y=0)$ – sînt punctele de forma $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots,$ $x_1, x_2, \ldots$ fiind soluțiile ecuației $f(x)=0$ (dacă acestea există); cu axa Oy $(x=0)$ – este punctul $(0, f(0))$, dacă $0\in D$.

II. Semnul funcției și eventualele simetrii ale graficului. Dacă $f\geq 0$ $(f\leq 0)$, atunci graficul funcției f este situat deasupra (respectiv dedesubtul) axei Ox.

Dacă f este o funcție pară (impară), atunci graficul ei este simetric față de axa Oy (respectiv față de originea sistemului xOy), și în acest caz este suficient ca domeniul de studiu să fie $D\cap[0, +\infty)$.

Dacă f este o funcție periodică, atunci este suficient să se studieze funcția pe un interval de lungime egală cu perioada principală a acesteia pentru ca apoi graficul ei să se traseze prin translații paralele pe mulțimea D.

III. Limite la capetele intervalelor, continuitatea funcției, asimptote. Dacă mulțimea D este nemărginită, atunci se calculează (dacă există) limita funcției f la $+\infty$ (sau/şi la $-\infty$), se determină (dacă există) asimptotele orizontale, oblice ale graficului funcției f.

Dacă D este o reuniune de intervale, atunci se calculează limitele laterale ale funcției f la capetele fiecăruia dintre aceste intervale. Simultan se determină eventualele asimptote verticale. De asemenea, se determină mulțimea de puncte ale mulțimii D în care funcția f este continuă, iar în punctele de discontinuitate se calculează limitele laterale.

IV. Derivata întîi. Se calculează f'. Se stabileşte mulțimea $D_{f'}$ pe care funcția f este derivabilă. Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$, adică se determină punctele critice ale funcției f. Soluțiile acestei ecuații, precum şi punctele în care funcția f nu este derivabilă sau în care derivata ei este infinită, sînt eventualele puncte de extrem local ale acestei funcții. Ele divizează mulțimea D într-un număr finit (sau infinit) de intervale. Se studiază semnul funcției f' pe fiecare dintre intervalele obținute. Astfel se stabilesc intervalele de monotonie, punctele de extrem local şi extremele locale ale funcției f.

Dacă funcția f este de două ori derivabilă, atunci, pentru trasarea graficului ei cu o exactitate sporită, se execută etapa V.

V. Derivata a doua. Se calculează f'' şi se rezolvă ecuația $f''(x)=0$. Soluțiile acestei ecuații, precum şi punctele în care derivata a doua nu există sau este infinită, sînt eventualele puncte de inflexiune ale funcției f. Se stabilesc intervalele pe care derivata a doua are semn constant, se determină semnul funcției f'' pe aceste intervale (acestea fiind intervale de concavitate şi/sau de convexitate ale funcției f) şi se determină punctele ei de inflexiune.

VI. Tabloul de variație[1] al funcției f include rezultatele obținute în etapele I–V.

În linia întîi se trece informația referitoare la domeniul de definiție al funcției f şi la valorile remarcabile ale lui x (zerourile derivatelor întîi şi a doua, punctele în care derivatele f' şi f'' nu există sau sînt infinite).

În linia a doua se trece informația referitoare la derivata întîi, obținută în etapa a IV-a. În coloana fiecărui zerou al derivatei se scrie 0. Se scrie semnul derivatei pe intervalele obținute.

În linia a treia se trece informația referitoare la derivata a doua, obținută în etapa a V-a. În coloana fiecărui zerou al derivatei a doua se scrie 0. Se scrie semnul derivatei a doua pe intervalele obținute.

În ultima linie, prin săgeți „$\nearrow$”, „$\searrow$” se notează monotonia funcției f, iar simbolurile „$\smile$”, „$\frown$” arată convexitatea, respectiv concavitatea ei; literele $\overline{m}$, $\overline{M}$ sau i semnifică faptul că punctul respectiv este punct de minim local, de maxim local sau punct de inflexiune.

VII. Trasarea graficului[1]**.** Într-un sistem de axe ortogonale xOy se trasează întîi asimptotele graficului funcției f (dacă acestea există), apoi punctele remarcabile $(x, f(x))$ din tabloul de variație al funcției f. Punctele remarcabile ale graficului funcției f se unesc

---

[1] Informațiile ce țin de periodicitatea, concavitatea, convexitatea funcției, de derivata a doua a funcției şi de punctele de inflexiune ale acesteia se referă numai la profilul real.

printr-o linie curbă, ţinîndu-se cont de paritatea, periodicitatea, monotonia, asimptotele, convexitatea şi/sau concavitatea funcţiei f.

Observaţie. Etapa a V-a poate fi omisă în cazul unor dificultăţi de calcul.

În continuare vom trasa graficele unor funcţii, parcurgînd sistematic etapele menţionate.

Exerciţii rezolvate

1. Să se traseze graficul funcţiei $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$;

b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; c) $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

Rezolvare:

a) I. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei f este $\mathbb{R}$.

Pentru $x=0$ avem $f(0)=0$. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in \{0, 3\}$. Aşadar, graficul funcţiei f trece prin originea sistemului de axe ortogonale xOy şi intersectează axa Ox în punctul $x_0 = 3$.

II. Funcţia f nu este nici pară, nici impară, deoarece $f(-x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x$ şi $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$. Cum $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 9x) = \frac{1}{3}x(x-3)^2$, rezultă că $f(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$ şi $f(x) \leq 0$ pentru $x \leq 0$.

III. Funcţia f este continuă pe mulţimea $\mathbb{R}$, deci asimptote verticale nu are.

Calculăm limitele la capetele intervalului $(-\infty, +\infty)$. Avem:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x(x-3)^2 = -\infty \text{ şi } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x(x-3)^2 = +\infty.$$

Astfel, graficul funcţiei f nu are asimptote oblice şi nici orizontale.

IV. $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 3\}$. Punctele $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$ sînt puncte critice.

V. Renunţăm la studiul derivatei a doua, întrucît acest exemplu este prevăzut şi pentru profilul umanistic.

VI. Alcătuim tabloul de variaţie al funcţiei f:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		+	0	–	0	+	
f		$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	$\overline{m}$	$\nearrow$	

Constatăm că $\overline{M} = f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$,

$\overline{m} = f(3) = 9 - 18 + 9 = 0$.

VII. Graficul funcţiei f este reprezentat în figura 5.14.

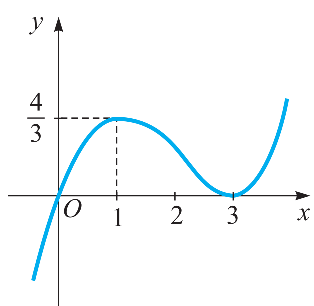


Fig. 5.14

b) I. Domeniul maxim de definiție al funcției f este mulțimea $\mathbb{R}$.

Graficul funcției f intersectează axele de coordonate numai în originea lor.

II. Funcția f nu este periodică; f este impară, deoarece este definită pe $\mathbb{R}$ şi $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, este suficient să restrîngem domeniul de studiu ($\mathbb{R}$) la mulțimea $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

III. Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. Limitele ei la capetele intervalului $(-\infty, +\infty)$ sînt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$. Aşadar, dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$ a graficului funcției f.

IV. $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$ (punctele critice ale funcției f). Pentru $x > 0$ se acceptă numai $x_2 = 1$. Evident, $f(1) = 0{,}5$.

V. $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Soluția ecuației $f''(x) = 0$ pentru $x > 0$ este $x_3 = \sqrt{3}$.

VI. Tabloul de variație al funcției f pentru $x \geq 0$ este cel alăturat, în care $\overline{M} = f(1) = 0{,}5$ este un maxim local, iar $\sqrt{3}$ este un punct de inflexiune. Punctul 0 este de asemenea un punct de inflexiune.

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f''	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f	i	$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	i	$\searrow$	

VII. Trasăm graficul funcției f pe $\mathbb{R}_+$ (fig. 5.15). Cum funcția f este impară, construim, față de originea sistemului de axe ortogonale xOy, simetricul graficului trasat pe mulțimea $\mathbb{R}_+$ şi obținem graficul funcției f pe mulțimea $\mathbb{R}$.

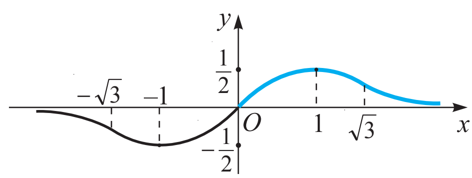


Fig. 5.15

c) I. $D = \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ avem $f(0) = 0$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Graficul funcției f intersectează axa Oy în origine, iar axa Ox – în punctele $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II. Funcția f este impară, periodică cu perioada principală 2π. Deci, vom studia funcția f pe $[0, 2\pi]$, iar la trasarea graficului ei vom ține cont de simetria acestuia față de originea sistemului de coordonate şi de periodicitatea funcției f.

III. Funcția f este continuă, asimptote nu are.

IV. $f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$. Ecuația $f'(x) = 0$ pe $[0, 2\pi]$ are două soluții: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ şi $x_2 = \frac{4\pi}{3}$.

V. Fiind complicat, renunțăm la studiul derivatei a doua.

VI. Alcătuim tabloul de variație al funcției f (pe $[0, 2\pi]$):

Constatăm că $\overline{M} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\overline{m} = f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	$\overline{m}$	$\nearrow$	

VII. Trasăm graficul funcției f pe $[0, 2\pi]$, apoi, prin translații, îl prelungim pe mulțimea $\mathbb{R}$ periodic cu perioada 2π. O porțiune a graficului funcției f este reprezentată în figura 5.16.

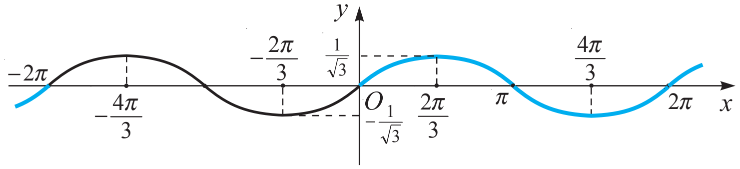


Fig. 5.16

2. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2+1}{x(x+a)}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se traseze graficul funcției f, știind că el trece prin punctul de coordonate $(1, 1)$.

Rezolvare:

I. Cum punctul $(1, 1) \in G_f$, obținem: $f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{1(1+a)} = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Aşadar, $f(x) = \frac{2x^2+1}{x(x+2)}$ şi domeniul maxim de definiție al funcției f este mulțimea $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Graficul funcției f nu intersectează axele de coordonate.

II. Funcția f nu este periodică; f nu este nici pară, nici impară; $f(x) \geq 0$ dacă şi numai dacă $x(x+2) > 0$ $(x \in D)$, adică $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, şi $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$.

III. Funcția f este continuă pe D. Limitele ei la capetele intervalului $(-2, 0)$ sînt:

$l_s(-2) = \lim\limits_{x\to -2-0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = +\infty$, $l_d(-2) = \lim\limits_{x\to -2+0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = -\infty$,

$l_s(0) = \lim\limits_{x\to -0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = -\infty$, $l_d(0) = \lim\limits_{x\to +0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = +\infty$.

Prin urmare, dreptele de ecuații $x = -2$ şi $x = 0$ sînt asimptote verticale la stînga şi la dreapta pentru graficul funcției f.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = 2$, rezultă că dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$ pentru graficul funcției f.

IV. $f'(x) = \frac{4x^2-2x-2}{x^2(x+2)^2}$, $\forall x \in D$ şi $f'(x) = 0$ dacă $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

V. Fiind complicat, renunțăm la studiul derivatei a doua.

VI. Tabloul de variație al funcției f este următorul:
Constatăm că $\overline{m} = f(1) = 1$ și $\overline{M} = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2.$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
f'	$+$	$+$	¦	$+$ $+$	0	$-$ $-$	¦	$-$ $-$	0	$+$	$+$
f		$\nearrow$	¦	$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	¦	$\searrow$	$\overline{m}$	$\nearrow$	

VII. Graficul funcției f este reprezentat în figura 5.17.

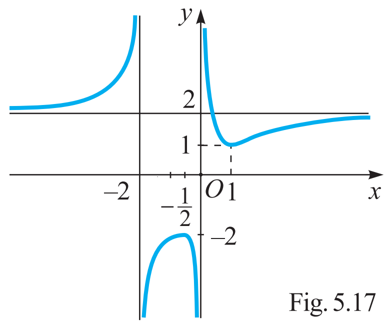


Fig. 5.17

Exerciții propuse

A

1. Să se traseze graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1;$ b) $f(x) = x^2 + 3x - 4;$

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2;$ d) $f(x) = x^2(x-1)^2.$

B

2. Să se traseze graficul funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$ (în cazul unor eventuale dificultăți de calcul, etapa cu derivata a doua poate fi omisă):

a) $f(x) = x\ln x;$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2};$ c) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2};$

d) $f(x) = e^{-x^2};$ e) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1};$ f) $f(x) = \dfrac{|1-x^2|}{x};$

g) $f(x) = (x-3)\sqrt{x};$ h) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$

3. Știind că suma lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu a:
a) să se exprime aria acestui triunghi în funcție de lungimea unei catete;
b) să se construiască graficul funcției obținute;
c) să se determine aria maximă a acestui triunghi (cea mai mare valoare a funcției obținute).

§4 Aplicații ale derivatelor în fizică, geometrie și economie. Probleme de maxim și minim

Vom aplica rezultatele teoretice obținute anterior privind determinarea punctelor de extrem ale unor funcții. Astfel, vom exemplifica eficacitatea aplicării metodelor analizei matematice la rezolvarea unor probleme de fizică, geometrie, economie etc. ce au ca obiectiv determinarea parametrilor optimi de funcționare a unor sisteme tehnice, economice, care ar asigura un randament maxim, o putere maximă, ar optimiza consumul de energie, de timp, ar minimaliza pierderile. Rezolvînd atare probleme, se realizează un anumit procedeu, numit ***optimizare***, care constă în alegerea și în aplicarea celei mai potrivite soluții din mai multe posibile, în selectarea parametrilor ce corespund maximului sau minimului unei funcții. Menționăm că rezolvarea unor astfel de probleme nu întotdeauna este posibilă dacă sînt folosite doar metodele algebrei sau geometriei elementare.

Pentru a determina valoarea maximă sau minimă a unei mărimi, vom exprima valorile acesteia printr-o funcție, apoi vom studia variația funcției obținute.

Probleme rezolvate

1. Dintr-o bucată de tablă de formă dreptunghiulară cu laturile de 50 cm și 80 cm se decupează în fiecare colț un pătrat, apoi se îndoaie marginile formate. Se obține o cutie de forma unui paralelipiped dreptunghic fără capac. Să se determine înălțimea cutiei, astfel încît volumul ei să fie maxim.

Rezolvare:

Notăm cu x lungimea laturii pătratului decupat și calculăm volumul $\mathcal{V}(x)$ al cutiei obținute:

$$\mathcal{V}(x) = x(50-2x)(80-2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4\,000x,$$

unde x variază în intervalul $\left[0, \frac{50}{2}\right] = [0, 25]$. Astfel, problema se reduce la determinarea celei mai mari valori a funcției $\mathcal{V}\colon [0, 25] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{V}(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4\,000x$.

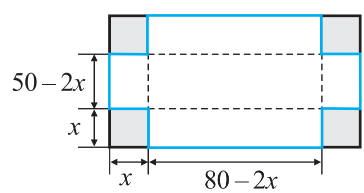


Fig. 5.18

Aflăm extremele funcției $\mathcal{V}$. Avem $\mathcal{V}'(x) = 12x^2 - 520x + 4\,000$. Rezolvăm ecuația $\mathcal{V}'(x) = 0$ și obținem că în $[0, 25]$ ea are o soluție unică: $x_0 = \frac{130 - \sqrt{4\,900}}{6} = 10$.

Cum $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(25) = 0$, rezultă că în punctul x_0 funcția $\mathcal{V}$ ia cea mai mare valoare.

Răspuns: Cutia are volum maxim dacă înălțimea ei este de 10 cm.

2. Dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru $2a$, să se afle cel cu aria maximă.

Rezolvare:

Fie x lungimea laturii AB a dreptunghiului $ABCD$, $AD > AB$ (fig. 5.19). Atunci $AD = \frac{2a - 2x}{2} = a - x$. Aria dreptunghiului $ABCD$ este $\mathcal{A}(x) = x(a-x) = -x^2 + ax$.

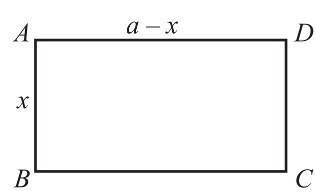


Fig. 5.19

Considerăm funcția $\mathcal{A}: [0, a] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x) = -x^2 + ax$.

Atunci $\mathcal{A}'(x) = -2x + a$. $\mathcal{A}'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Obținem tabloul de variație al funcției $A: [0, a] \to \mathbb{R}$:

x	0		$\frac{a}{2}$		a
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{4}$	$\searrow$	

Dreptunghiul $ABCD$ are aria maximă $\mathcal{A}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$ dacă el este un pătrat cu latura $\frac{a}{2}$.

Răspuns: $\mathcal{A}_{\max} = \frac{a^2}{4}$ unități pătrate.

Consecință. Dacă suma a două numere pozitive este cunoscută, produsul lor este maxim în cazul în care numerele sînt egale.

Se poate demonstra că suma a două numere pozitive, cu produsul lor constant, este minimă dacă numerele sînt egale.

3. Să se determine coordonatele punctului graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, aflat la distanța minimă de punctul $M(10, 5)$ (fig. 5.20).

Rezolvare:

Orice punct A al graficului funcției f are abscisa x și ordonata $x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Notăm cu $\varphi(x)$ distanța dintre punctele M și A și obținem:

$$\varphi(x) = \sqrt{(x-10)^2 + (x^2 + 3 - 5)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}.$$

Problema se reduce la determinarea minimului funcției $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}$.

Avem: $\varphi'(x) = \frac{2x^3 - 3x - 10}{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Punctul $x_0 = 2$ este punct de minim local pentru funcția φ, deoarece $\varphi' < 0$, dacă $x < 2$, și $\varphi' > 0$, dacă $x > 2$. Atunci $f(2) = 2^2 + 3 = 7$. Astfel, coordonatele punctului A sînt 2 și 7.

Răspuns: Punctul are coordonatele 2 și 7.

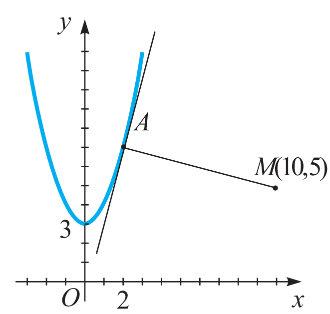


Fig. 5.20

4. Un lot de pămînt de formă dreptunghiulară trebuie îngrădit, știind că dintr-o parte este deja construit gard. Prețul unui metru de gard paralel cu gardul deja construit este de 100 lei, iar al unui metru de restul gardului – de 150 lei. Să se determine aria maximă care poate fi îngrădită, dacă se dispune de 18 000 lei.

Rezolvare:

Fie x și y dimensiunile lotului, atunci, din condiția problemei, avem:

$$100 \cdot x + 2 \cdot 150 \cdot y = 18\,000 \Leftrightarrow x + 3y = 180 \Leftrightarrow y = 60 - \frac{x}{3}.$$

Aria lotului $\mathcal{A}(x) = x \cdot y = x\left(60 - \frac{x}{3}\right)$. $\mathcal{A}'(x) = 60 - \frac{2}{3}x$.

Pentru $\mathcal{A}'(x)=0$ obținem $60-\frac{2}{3}x=0 \Leftrightarrow x=90$.

Deoarece $\mathcal{A}''(x)=-\frac{2}{3}<0$, rezultă că în $x=90$ funcția $\mathcal{A}(x)$ are un maximum.

Prin urmare, aria maximă care poate fi îngrădită $\mathcal{A}_{\max}=90\cdot\left(60-\frac{90}{3}\right)=2\,700\,(\text{m}^2)$.

Răspuns: $2\,700\ \text{m}^2$.

5. Să se determine traseul cel mai economic pentru construirea unei căi ferate între localitățile A şi B, ştiind că o porțiune de lungime d a ei trebuie construită paralel şi în imediata vecinătate a unei şosele.

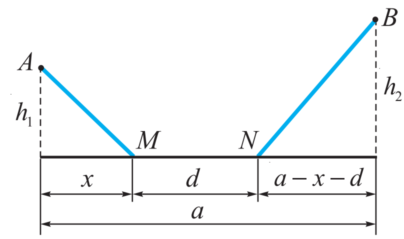


Fig. 5.21

Rezolvare:

Fie h_1, h_2 distanțele dintre A, respectiv B, şi şosea, a – distanța dintre proiecțiile punctelor A şi B pe direcția şoselei (fig. 5.21).

Evident, costul traseului este direct proporțional cu lungimea traseului $L(x)$. Din figură avem:

$$L(x)=AM+MN+NB=\sqrt{x^2+h_1^2}+d+\sqrt{h_2^2+(a-x-d)^2}.$$

Avem $L'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}-\dfrac{a-x-d}{\sqrt{h_2^2+(a-x-d)^2}}$.

Soluțiile ecuației $L'(x)=0$ sînt $x_1=\dfrac{(a-d)h_1}{h_1+h_2}$, $x_2=\dfrac{(a-d)h_1}{h_1-h_2}$.

În punctul $x_1=\dfrac{(a-d)h_1}{h_1+h_2}$, funcția $L(x)$ are un minim, deoarece $L''(x_1)>0$.

Aşadar, $L_{\min}=L(x_1)=\sqrt{(a-d)^2+(h_1+h_2)^2}+d$.

6. Cererea pe piață pentru un produs este descrisă de funcția definită prin formula $p(x)=780-2x-0{,}1x^2$, unde x este numărul de unități de produs, iar p – prețul (în lei).

Cheltuielile medii de fabricare a unei unități de produs se descriu de funcția definită prin formula $\overline{C}(x)=\dfrac{1000}{x}+500+2x$. (Funcția cererii şi funcția cheltuielilor medii se determină în baza datelor statistice.)

Să se determine beneficiul brut maxim obținut din vînzarea produsului şi prețul respectiv.

Rezolvare:

Beneficiul brut $B(x)$ este egal cu diferența dintre prețul de vînzare şi cheltuielile de fabricare a produsului, adică $B(x)=p(x)\cdot x-\overline{C}(x)\cdot x=$

$$=(780-2x-0{,}1x^2)x-\left(\frac{1000}{x}+500+2x\right)x=280x-4x^2-0{,}1x^3-1000.$$

Derivata $B'(x)=280-8x-0{,}3\cdot x^2$.

Din $B'(x)=0$ obținem ecuația $0{,}3x^2+8x-280=0$, cu soluțiile $x_1=20$, $x_2=-\dfrac{28}{0{,}6}$ (care nu corespunde condiției problemei). Deoarece $B''(20)<0$, în punctul $x=20$ avem maxim. Astfel, obținem beneficiul brut maxim $B(20)=280\cdot 20-4\cdot 20^2-0{,}1\cdot 20^3-1\,000=$ $=2\,200$ (lei) şi prețul respectiv $p(20)=780-2\cdot 20-0{,}1\cdot 20^2=700$ (lei).

Răspuns: 2 200 lei; 700 lei.

7. Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză medie de v km/h (cu condiția că $40\le v\le 70$), consumînd $\left(8+\dfrac{v^2}{300}\right)$ litri/h de benzină. Să se afle viteza optimă (pentru care cheltuielile sînt minime), ştiind că şoferul este retribuit cu 30 lei/h, iar benzina costă 12 lei litrul.

Rezolvare:

Distanța a fost parcursă în $\dfrac{100}{v}$ ore, în care s-au consumat $\left(8+\dfrac{v^2}{300}\right)\cdot\dfrac{100}{v}=\dfrac{v^2+2400}{3v}$ litri de benzină. În aceste condiții, cheltuielile totale pentru întregul parcurs sînt

$$c(v)=30\cdot\frac{100}{v}+12\cdot\frac{v^2+2\,400}{3v}=\frac{4v^2+13600}{v}\ \text{(lei)}.$$

Viteza optimă este cea pentru care cheltuielile totale sînt minime. Rezolvăm ecuația $c'(v)=\dfrac{4v^2-13\,600}{v^2}=0$ şi obținem $v_0=\sqrt{3\,400}\approx 58{,}31$ (km/h). Prin urmare, pentru această valoare a vitezei cheltuielile totale sînt minime.

Răspuns: $v_{\text{optim}}\approx 58{,}31$ km/h.

8. Un muncitor trebuie să deplaseze o piesă de bronz pe o placă de fontă aşezată pe un plan orizontal, cu ajutorul unei forțe $\vec{Q}$. Masa piesei este de 100 kg, iar coeficientul de frecare dintre bronz şi fontă $\mu=0{,}2$. Să se determine măsura unghiului α, format de direcția forței şi planul orizontal, astfel încît forța $\vec{Q}$ necesară acestei deplasări să fie minimă.

Rezolvare:

Din figura 5.22 se constată că echilibrul dinamic al forțelor de frecare $\vec{F}$, de tracțiune $\vec{Q}$, de greutate $\vec{G}$ şi de reacțiune $\vec{N}$ este asigurat dacă:

$$\begin{cases} Q\cos\alpha-F=0,\\ N+Q\sin\alpha-G=0.\end{cases}$$

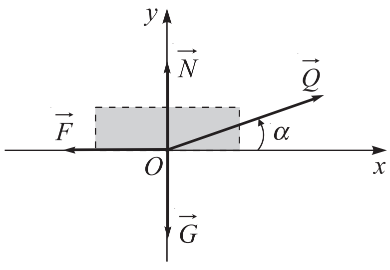


Fig. 5.22

Din acest sistem, substituind formula pentru forța de frecare $F=\mu N$, determinăm funcția $Q(\alpha)$, al cărei minim trebuie aflat:

$$Q(\alpha)=\frac{\mu G}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

Astfel, problema se reduce la determinarea celei mai mici valori a funcției $Q: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \; Q(\alpha) = \frac{\mu G}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

Aflăm extremele funcției Q. Avem $Q'(\alpha) = -\frac{\mu G(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}$. Soluția ecuației $Q'(\alpha) = 0$ este $\alpha = \operatorname{arctg}\mu$. Pentru această valoare funcția $Q(\alpha)$ are un minim:

$$Q_{\min} = Q(\operatorname{arctg}\mu) = \frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Substituind datele problemei, obținem:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}2; \quad \alpha \approx 11°20' \text{ şi } Q = \frac{0{,}2 \cdot 100}{\sqrt{1+0{,}2^2}} \approx 19{,}6 \text{ kg}.$$

Răspuns: $\approx 11°20'$.

9. Să se determine înălțimea la care trebuie aşezată o sursă de lumină deasupra unei platforme circulare de rază a pentru ca iluminarea platformei să fie maximă, ştiind că intensitatea luminoasă I pe direcția verticală este constantă, iar iluminarea[1] E este dată de formula $E = \frac{I \cdot \cos\alpha}{r^2}$, unde α este unghiul de incidență a razelor pe această suprafață.

Rezolvare:

Notăm cu x distanța de la sursa de lumină pînă la platformă. Din figura 5.23 obținem:

$$r^2 = a^2 + x^2 \text{ şi } \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

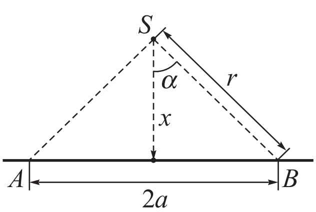


Fig. 5.23

Prin urmare, funcția al cărei maxim trebuie determinat este $E = E(x) = \frac{I \cdot x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in (0, +\infty)$.

Egalînd derivata cu zero, obținem:

$$E'(x) = I\frac{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+x^2)^3} = 0,$$

soluția fiind $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Pentru această valoare funcția $E(x)$ are un maxim: $E_{\max} = \frac{2I}{3\sqrt{3}a^2}$.

Răspuns: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

10. Care trebuie să fie rezistența unui circuit extern, astfel încît sursa de curent cu tensiunea electromotoare $\varepsilon = 10$ V şi rezistența internă $r = 20\,\Omega$ să debiteze o putere maximă? Care este valoarea numerică a acestei puteri?

Rezolvare:

Notăm cu x rezistența circuitului extern şi cu P puterea curentului electric pe circuitul extern. Atunci, conform formulei pentru puterea curentului, avem: $P = I^2x$, unde I este intensitatea curentului, care poate fi determinată din legea lui Ohm: $I = \frac{\varepsilon}{x+r}$.

[1] Unitatea de măsură pentru iluminare este luxul (lx).

Deci, obținem funcția $P(x)=\frac{\varepsilon^2\cdot x}{(x+r)^2}$, $x\in(0,+\infty)$, a cărei derivată

$$P'(x)=\varepsilon^2\frac{(x+r)^2-2x(x+r)}{(x+r)^4}=\varepsilon^2\frac{r-x}{(x+r)^3}$$

se anulează pentru $x=r$. În $x=r$ funcția $P(x)$ are un maximum. Substituind datele problemei, obținem $P_{\max}=P(r)=\frac{\varepsilon^2}{4r}=\frac{5}{4}$ W.

Răspuns: $x=r$, $P_{\max}=\frac{5}{4}$ W.

Probleme propuse

A

1. Un punct material se mişcă rectiliniu conform legii $s(t)=12t-t^3$ (s este distanța exprimată în metri, iar t – timpul exprimat în secunde).
a) Care este viteza punctului material în momentul inițial?
b) Peste cît timp de la plecare punctul material se va opri? Care este distanța parcursă pînă în acel moment?

2. Un element galvanic de tensiune electromotoare E şi rezistență interioară r produce un curent de intensitate I într-un circuit extern de rezistență R. Intensitatea curentului este dată de relația $I=\frac{E}{r+R}$. Puterea efectivă a elementului galvanic este $P(R)=RI^2=\frac{RE^2}{(r+R)^2}$.
Să se determine rezistența R pentru care puterea P aste maximă.

3. Într-un triunghi cu o latură de lungime a şi înălțimea corespunzătoare acesteia h se înscrie un dreptunghi, astfel încît una dintre laturile sale este conținută de această latură. Să se afle aria maximă a dreptunghiului.

4. Prețul unei unități de produs este de 225 lei. Cheltuielile de fabricare $C(x)$ sînt date de funcția definită prin formula $C(x)=95x+x^2$, unde x este numărul de unități de produs fabricate. Să se determine beneficiul brut maxim.

B

5. Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este $s(t)=at^3+bt+c$. Să se determine viteza şi accelerația mobilului în momentul t.

6. Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este $s(t)=t^3-6t^2+2$. Să se determine:
a) momentul în care accelerația sa este nulă;
b) valoarea minimă a vitezei mobilului.

7. Cheltuielile de fabricare ale unui produs se descriu de funcția definită prin formula $C(x)=5+36x$, iar cererea – de funcția definită prin formula $p(x)=-x^2+18x+3$, $9<x<13$. Să se determine numărul de unități de produs, x, pentru care beneficiul brut este maxim, precum şi valoarea acestuia.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A

1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 + 6x^2$; b) $f(x) = x^3 - \frac{x}{3}$; c) $f(x) = (x+1)^2$; d) $f(x) = x^2 + x + 1$.

2. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale şi să se alcătuiască tabloul de variaţie al funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 + 2x$; b) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$; c) $f(x) = (x-1)^2(x+2)^2$;

d) $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$; e) $f(x) = 3 + x - x^2$; f) $f(x) = x^4 - 4x + 2$.

3. Să se afle punctele de extrem local şi extremele locale ale funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$; b) $f(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 8$; c) $f(x) = x^3 - 12x + 4$;

d) $f(x) = x^3 + x - 4$; e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - 4x + 1$; f) $f(x) = x^2(x+1)^3$.

4. Pe intervalul indicat, să se determine extremele globale ale funcţiei $f: I \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2,\ I = [0; 1]$; b) $f(x) = x^3 - x + 2,\ I = [0; 2]$.

5. Să se traseze graficul funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$; b) $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

6. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + ax^2 - 2$. Să se reprezinte grafic funcţia f, ştiind că:

a) graficul trece prin punctul $(1, 1)$;

b) în punctul $x = 1$ funcţia f are un extrem local.

7. Costul unui lot de produse este de 240 lei. Cheltuielile de fabricare sînt descrise de funcţia definită prin formula $C(x) = 3x^2 + 6x + 120$, unde x este numărul de unităţi de produs. Să se determine beneficiul brut maxim.

Indicaţie: Beneficiul brut $B(x)$ se exprimă prin formula $B(x) = 240x - C(x)$.

B

8. Să se arate că:

a) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2\operatorname{arctg}x, & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ -2\operatorname{arctg}x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0]; \end{cases}$

b) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg}x + \frac{\pi}{4},\ x \in (-\infty, 1)$;

c) $2\operatorname{arctg}x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0,\ x \in (-1; 1)$.

9. Să se afle intervalele de monotonie şi extremele locale şi globale ale funcţiei:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x+1|$; b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

c) $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \ln x$.

10. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încît funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx - \ln(1+x^2)$ să fie descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

11. Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$ are un maxim şi un minim local.

12. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface condițiile:

a) f este derivabilă pe $\mathbb{R}$; b) există $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$; c) există $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

Să se arate că $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Indicație. Aplicați regula lui l'Hospital pentru calculul limitei $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x f(x)}{e^x}$.

13. Se consideră funcția $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{mx^2 - 1}{x-1}$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m, astfel încît:

a) funcția să fie strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$;
b) funcția să fie strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele specificate în a);
c) funcția să admită puncte de extrem;
d) graficul funcției să nu aibă asimptote.

14. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcției:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2$; b) $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + |x|$.

15. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2$; b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x$; d) $f\colon (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;
e) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\ln x - 1|$; f) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x|$.

16. Să se determine asimptotele graficului funcției: $f\colon D \to \mathbb{R}$, D fiind domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$;
d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$; e) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

17. Să se afle numerele reale a, b, ştiind că dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru funcția $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x^2 + ax + 1}{bx + 1}$.

18. Să se traseze graficul funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x-2}$;
d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$; e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; f) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.

19. Cheltuielile de fabricare (în lei) ale unui produs se descriu de funcția definită prin formula $C(x) = 1 + 76x$, iar cererea – de funcția definită prin formula $p(x) = -x^2 + 42x - 80$, $2 \le x \le 40$. Să se determine numărul de unități de produs, x, care trebuie fabricate pentru a obține un beneficiu maxim, precum şi valoarea acestui beneficiu.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Determinați intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și completați tabloul de variație al funcției $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x.$ ④

2. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x - 2.$ ③

3. Prețul unei unități de produs este de 160 lei. Cheltuielile de producție sînt descrise de funcția $C(x) = 3x^2 + 34x + 450,$ unde x – numărul de unități de produs. Determinați beneficiul maxim. ③
   Indicație. Beneficiul $B(x) = 160 \cdot x - C(x).$

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

B

1. Determinați intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și completați tabloul de variație al funcției $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 e^{-x^2}.$ ④

2. Determinați, pe intervalul $I = [-1, 2],$ extremele globale ale funcției $f: D \to \mathbb{R},$ ②
   $$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } -1 \le x \le 0 \\ 2\ln x, & \text{dacă } 0 < x \le 2. \end{cases}$$

3. Trasați graficul funcției $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}.$ ②

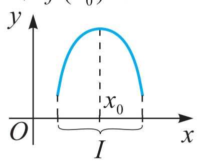
4. Cunoscînd funcția cererii $p(x) = 800 - 0{,}5x$ și funcția ofertei $p_1(x) = 700 + 2x$ (x – numărul de unități de produs), determinați mărimea impozitului pentru fiecare unitate de produs, astfel încît venitul din impozitare să fie maxim. ②
   Indicație. Venitul din impozitare a x unități de produs se exprimă prin formula $V(x) = (p(x) - p_1(x))x.$

Aplicații ale derivatelor

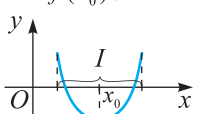
Rolul derivatei întîi în studiul funcțiilor

Fie funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, derivabilă pe I.

1. Dacă $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci $f(x)$ este constantă pe I.
2. Funcția f este **crescătoare** (**descrescătoare**) pe I dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.
3. Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este **punct de maxim local** al funcției f.
   Se notează: $\nearrow f(x_0) \searrow$.



4. Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este **punct de minim local** al funcției f.
   Se notează: $\searrow f(x_0) \nearrow$.

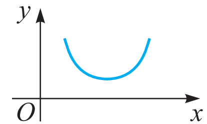


5. Punctele de maxim local și de minim local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.
6. Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sînt eventualele puncte de extrem local ale funcției f.

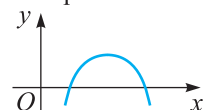
Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

Fie funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, de două ori derivabilă pe I.

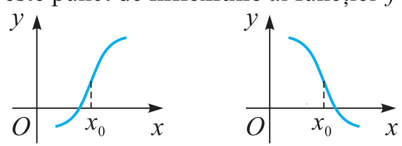
1. Dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este **convexă** pe I.



2. Dacă $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este **concavă** pe I.



3. Fie $f''(x_0) = 0$ și $V(x_0)$ o vecinătate a punctului $x_0 \in I$.
   Dacă $f''(x) < 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x) > 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$, sau invers ($f''(x) > 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x) < 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$), atunci x_0 este punct de **inflexiune** al funcției f.

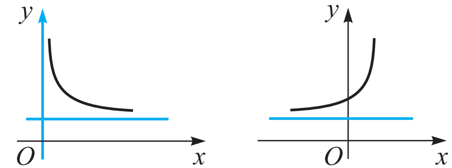


4. Soluțiile ecuației $f''(x) = 0$ sînt eventualele puncte de inflexiune ale funcției f.

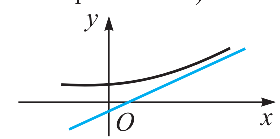
Probleme de maxim și minim

Asimptote

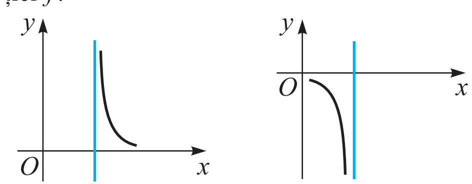
1. Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$), atunci dreapta de ecuație $y = l$ este **asimptotă orizontală** la $+\infty$ (la $-\infty$) a graficului funcției f.



2. Dacă există și sînt finite limitele
   $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $(m \neq 0)$ și $n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$,
   atunci dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, este **asimptotă oblică** la $+\infty$ a graficului funcției f. (Similar pentru $-\infty$.)



3. Dacă $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$) este $+\infty$ sau $-\infty$, atunci dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală la stînga** (**dreapta**) a graficului funcției f.



Modulul

6 Numere complexe

Obiective

- utilizarea numerelor complexe, a numerelor reale scrise sub diferite forme, a terminologiei aferente în diverse contexte;
- utilizarea operațiilor cu numere complexe şi numere reale, a proprietăților comune ale acestora în rezolvări de probleme şi exerciții;
- aplicarea unor algoritmi specifici calculului cu numere complexe pentru rezolvarea ecuațiilor (de gradul II, *bipătratice, *binome, *trinome, *reciproce) în mulțimea **C**;
- *reprezentarea geometrică a numerelor complexe, a modulelor numerelor complexe şi aplicarea acestor reprezentări în rezolvări de probleme;
- *determinarea rădăcinilor de ordinul n, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, ale unui număr complex scris sub formă trigonometrică sau sub formă algebrică.

§1 Operații cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică

Din cursul gimnazial de matematică se ştie că ecuația de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, are soluții reale dacă şi numai dacă discriminantul ei este nenegativ. Dacă însă discriminantul ei este negativ (de exemplu, discriminanții ecuațiilor $3x^2 - x + 4 = 0$, $x^2 + 1 = 0$), atunci ecuația nu are soluții reale, deoarece în $\mathbb{R}$ nu există rădăcini de ordinul doi ale unui număr negativ. Pentru ca să existe soluții ale tuturor ecuațiilor de acest tip, matematicienii din secolul al XVI-lea utilizează expresii de forma $\sqrt{-a}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. În secolul al XVIII-lea, L. Euler introduce notația $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ (*i* de la cuvîntul latin „imaginarius"). Astfel, mulțimea numerelor reale se extinde la mulțimea numerelor de forma $a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, numite în secolul al XIX-lea de C. F. Gauss[1] *numere complexe*.


Carl Friedrich Gauss

Definiție. Se numeşte **număr complex** expresia de forma $a + b\mathrm{i}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, iar i este un simbol cu proprietatea $\mathrm{i}^2 = -1$.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777–1855) – matematician, fizician şi astronom german.

Vom nota mulțimea numerelor complexe cu **C**, deci $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a, b\in \mathbb{R},\ i^2=-1\}$. Prin urmare, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbf{C}$.

Dacă $z=a+bi$, atunci se spune că numărul complex *z* este scris sub ***formă algebrică*** (se admite şi scrierea $z=a+ib$). Numărul *a* se numeşte ***partea reală*** a numărului $z=a+bi$ şi se notează cu Re*z*, iar *b* se numeşte ***partea imaginară*** a lui *z* şi se notează cu Im*z*.

Numerele complexe $z_1=a+bi$ şi $z_2=c+di$ se consideră ***egale*** dacă şi numai dacă $a=c$ şi $b=d$. Numărul de forma $a+0i$ se identifică cu numărul real *a*. Prin urmare, mulțimea numerelor reale este o submulțime a mulțimii numerelor complexe. Numărul de forma $0+bi,\ b\neq 0,$ se numeşte ***pur imaginar*** şi se notează *b*i. Numărul complex $i=0+1i$ se numeşte ***unitate imaginară***, însă ea nu ține de efectuarea unor măsurări. Acest număr este o soluție în **C** a ecuației $x^2+1=0$ (ecuație care nu are soluții în $\mathbb{R}$).

Exercițiu rezolvat

Să se determine numerele $x, y\in\mathbb{R}$, astfel încît $2+3i+(x+yi)=5+7i$.

Rezolvare:

$2+3i+(x+yi)=5+7i \Leftrightarrow (2+x)+(3+y)i=5+7i$.

Egalînd părțile reale şi respectiv cele imaginare, obținem: $\begin{cases}2+x=5\\3+y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3,\\y=4.\end{cases}$

Definim ***operațiile de adunare, scădere şi înmulțire*** a numerelor complexe în modul următor:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Adunarea (scăderea) se efectuează adunînd (scăzînd) între ele părțile reale şi respectiv părțile imaginare ale numerelor. Scăderea este operație inversă adunării.

Exemple

1. $(2+3i)+(-3+7i)=[2+(-3)]+(3+7)i=-1+10i$;

2. $(2+3i)\cdot(-3+7i)=[2\cdot(-3)-3\cdot 7]+[2\cdot 7+3(-3)]i=-27+5i$.

Observație. Operațiile de adunare, scădere, înmulțire cu numere complexe se efectuează similar cu operațiile cu polinoame în nedeterminata i, considerînd $i^2=-1$.

Definiție. Se numeşte **conjugatul** numărului complex $z=a+bi$ numărul $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$. (Notația $\bar{z}$ se citeşte „z barat”.)

Produsul $z\cdot\bar{z},\ z\in\mathbf{C}$, are o semnificație deosebită, deoarece el este un număr real nenegativ: $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2=a^2+b^2$.

Proprietățile operațiilor de adunare şi înmulțire a numerelor complexe (sînt aceleaşi ca şi pentru numerele reale):

1° $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – adunarea este comutativă;

2° $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – adunarea este asociativă;

3° $0 = 0 + 0 \cdot \mathrm{i}$ este elementul neutru pentru adunare;

4° $-z = -a - b\mathrm{i}$ este opusul lui $z = a + b\mathrm{i}$;

5° $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – înmulțirea este comutativă;

6° $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ – înmulțirea este asociativă;

7° $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – înmulțirea este distribuitivă față de adunare;

8° $1 = 1 + 0 \cdot \mathrm{i}$ este elementul neutru pentru înmulțire;

9° $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$ este inversul pentru $z = a + b\mathrm{i},\ z \neq 0.$

Expresia pentru z^{-1} se poate obține astfel:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\mathrm{i}} = \frac{a - b\mathrm{i}}{(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}.$$

Împărțirea numerelor complexe se poate defini ca operație inversă a înmulțirii: $z_1 : z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1},\ z_2 \neq 0,$ însă, pentru a evita calcule complicate, este mai simplu să se procedeze astfel:

dacă $z_1 = a + b\mathrm{i},\ z_2 = c + d\mathrm{i},\ z_2 \neq 0,$ atunci $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{(a + b\mathrm{i})\overline{(c + d\mathrm{i})}}{(c + d\mathrm{i})\overline{(c + d\mathrm{i})}} =$

$$= \frac{(a + b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})}{(c + d\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\mathrm{i}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}.$$

Exemple

1. $\frac{7 + 3\mathrm{i}}{5 - \mathrm{i}} = \frac{(7 + 3\mathrm{i})(5 + \mathrm{i})}{(5 - \mathrm{i})(5 + \mathrm{i})} = \frac{35 + 7\mathrm{i} + 15\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2}{25 + 1} = \frac{35 - 3 + 22\mathrm{i}}{26} = \frac{16}{13} + \frac{11}{13}\mathrm{i}.$

2. $(1 + \mathrm{i})^{-1} = \frac{1}{1 + \mathrm{i}} = \frac{1 - \mathrm{i}}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \frac{1 - \mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$

Definiție. Se numeşte **modulul numărului complex** $z = a + b\mathrm{i}$ numărul real negativ $\sqrt{a^2 + b^2}$, notat $|a + b\mathrm{i}|$ sau $|z|$. Deci, $|a + b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$

Exemple

Pentru $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ z_2 = \mathrm{i},$ obținem $|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1,\ |z_2| = |\mathrm{i}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$

Teorema 1. Pentru orice numere complexe z, z_1, z_2 sînt adevărate egalitățile:

1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$; **2°** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$; **3°** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},\ z_2 \neq 0$ (deci şi $\overline{z}_2 \neq 0$);

4° $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$; **5°** $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$; **6°** $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$; **7°** $\overline{\overline{z}} = z.$

Demonstrație

Aceste proprietăți se verifică ușor, scriind numerele sub formă algebrică.

De exemplu:

2° Fie $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i},\ z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$, atunci $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i})} =$

$= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\mathrm{i}} = a_1a_2 - b_1b_2 - (a_1b_2 + b_1a_2)\mathrm{i} = (a_1 - b_1\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i}) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$

3° Notăm $t = \dfrac{z_1}{z_2}$. Atunci $t \cdot z_2 = z_1$, deci $\bar{t} \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1$, sau $\bar{t} = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. ►

Exercițiu. Arătați că, fiind date numerele $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, ecuațiile $z_1 \cdot u = z_2\ (z_1 \neq 0)$ și $z_1 + t = z_2$ au soluții unice.

Observație. Datorită faptului că operațiile cu numere complexe au aceleași proprietăți ca și operațiile respective cu numere reale, pentru numerele complexe pot fi aplicate: formulele cunoscute pentru calculul prescurtat; noțiunea de putere cu exponent întreg a numărului complex nenul z: $z^0 = 1,\ z^k = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{k \text{ ori}},\ z^{-k} = (z^{-1}),\ k \in \mathbb{N}^*$; proprietățile acestei puteri: $z^n \cdot z^m = z^{n+m},\ (z^n)^m = z^{n \cdot m},\ z \neq 0,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Astfel: $\mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i},\ \mathrm{i}^4 = 1,\ \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}.$

De asemenea, pot fi aplicate formulele $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ pentru calculul soluțiilor ecuației de gradul II $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbf{C},\ a \neq 0$.

Menționăm că orice ecuație de gradul II are soluții în mulțimea **C**, deoarece pentru orice număr complex z există un număr complex u, astfel încît $u^2 = z$ (acest fapt va fi demonstrat mai jos).

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze: $A = (2 + 3\mathrm{i})^3 - \dfrac{7 + 3\mathrm{i}}{5 - \mathrm{i}}$.

Rezolvare:

Aplicînd formula cubului sumei și rezultatul obținut anterior pentru $\dfrac{7 + 3\mathrm{i}}{5 - \mathrm{i}}$, obținem:

$$A = 8 + 3 \cdot 4 \cdot 3\mathrm{i} + 3 \cdot 2 \cdot (3\mathrm{i})^2 + (3\mathrm{i})^3 - \left(\frac{16}{13} + \frac{11}{13}\mathrm{i}\right) = 8 + 36\mathrm{i} + 54\mathrm{i}^2 + 27\mathrm{i}^3 - \frac{16}{13} - \frac{11}{13}\mathrm{i} =$$

$$= 8 - 54 - \frac{16}{13} + \left(36 - 27 - \frac{11}{13}\right)\mathrm{i} = -\frac{614}{13} + \frac{106}{13}\mathrm{i}.$$

2. Să se calculeze:

a) i^{73}; b) $\mathrm{i}^{24k+3},\ k \in \mathbb{N}$; c) $(7 - 3\mathrm{i})^{-1}$; d*) $(2 + \mathrm{i})^7$.

Rezolvare:

a) $\mathrm{i}^{73} = \mathrm{i}^{72+1} = (\mathrm{i}^4)^{18} \cdot \mathrm{i} = 1^{18} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}.$

b) $\mathrm{i}^{24k+3} = (\mathrm{i}^4)^{6k} \cdot \mathrm{i}^3 = 1^{6k} \cdot (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}.$

c) $(7 - 3\mathrm{i})^{-1} = \dfrac{1}{7 - 3\mathrm{i}} = \dfrac{7 + 3\mathrm{i}}{(7 - 3\mathrm{i})(7 + 3\mathrm{i})} = \dfrac{7 + 3\mathrm{i}}{49 + 9} = \dfrac{7}{58} + \dfrac{3}{58}\mathrm{i}.$

d) Aplicînd formula binomului lui Newton, obținem:

$(2+i)^7 = 2^7 + 7\cdot 2^6 \cdot i + 21\cdot 2^5 \cdot i^2 + 35\cdot 2^4 \cdot i^3 + 35\cdot 2^3 \cdot i^4 + 21\cdot 2^2 \cdot i^5 + 7\cdot 2\cdot i^6 + i^7 =$
$= 128 + 448i - 672 - 560i + 280 + 84i - 14 - i = -278 - 29i.$

3. Să se rezolve în **C** ecuația:

a) $(2+i)z - (3+6i)z = 5+2i;$ b) $z^2 - 2z + 3 = 0.$

Rezolvare:

a) Folosind proprietățile operațiilor cu numere complexe, obținem:

$(2+i-3-6i)z = 5+2i \Leftrightarrow (-1-5i)z = 5+2i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \frac{5+2i}{-1-5i} = \frac{(5+2i)(-1+5i)}{(-1-5i)(-1+5i)} = \frac{-15+23i}{1+25} = -\frac{15}{26} + \frac{23}{26}i.$$

Răspuns: $S = \left\{-\frac{15}{26} + \frac{23}{26}i\right\}.$

b) $\Delta = 4 - 12 = -8 = (i\sqrt{8})^2 = (2\sqrt{2}i)^2.$

Astfel, soluțiile sînt $z_1 = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = 1 + i\sqrt{2},\ z_2 = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = 1 - i\sqrt{2}.$

Răspuns: $S = \{1 - i\sqrt{2}, 1 + i\sqrt{2}\}.$

Exerciții propuse

A

1. Să se calculeze:

a) $(-2+3i)+(1-i);$ b) $4+3i-(-2+5i);$ c) $(\sqrt{3}-i)+(\sqrt{2}-i\sqrt{3});$

d) $(1-3i)(2-4i);$ e) $(\sqrt{3}-i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3});$ f) $(2+i):(3+4i);$

g) $(3-i)^{-1};$ h) $\frac{2+4i}{1-i}+22-23i;$ i) $(1-i)(1+i)^2;$

j) $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^5};$ k) $\frac{(1-i)^3}{(1+i)^7};$ l) $\frac{(1-2i)^2-(1+i)^3}{(3-2i)^3-(2-i)^2}.$

2. Să se calculeze:

a) $i^3;$ b) $i^4;$ c) $i^{24};$ d) $i^{131};$ e) $i^{2010}.$

3. Să se determine numerele reale x și y, astfel încît:

a) $(1+3i)x+(2-5i)y = 7+i;$ b) $\overline{(2+5i)}x-(1+i)y = i;$

c) $i\cdot x + i((i+1)x-(3-i)y) = 3+2i;$ d) $7i\cdot x + (\sqrt{3}-i)(\overline{x-iy}) = 4-3i.$

4. Să se rezolve în **C** ecuația:

a) $2z^2 - 3z + 3 = 0;$ b) $\bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0;$ c) $z^2 + z + 4 = 0;$

d) $\sqrt{2}z^2 - z + 1 = -2z;$ e) $2z^2 + z - 2 = 3z - 7;$ f) $\frac{2-z}{3+z} = \frac{-4z+1}{5-z};$

g) $(3-z)(-4+z) = (2+z)z + 7;$ h) $z^2 - 2z + 2 = 0;$ i) $z+2 = \frac{-3-z}{z+1}.$

5. Să se calculeze:

a) $(2+\mathrm{i})^3+(2-\mathrm{i})^3$; b) $(3-\mathrm{i})^3-(3+\mathrm{i})^3$;

c*) $(1-2\mathrm{i})^5-(1+2\mathrm{i})^5$; d*) $(1-2\mathrm{i})^6$.

6. Să se rezolve în **C** ecuația:

a) $(1-\mathrm{i})z=3+\mathrm{i}$; b) $3z\cdot\mathrm{i}+(5-2\mathrm{i})z=3z+2-\mathrm{i}$;

c) $\dfrac{z}{2+i}-7+\mathrm{i}=z(1+\mathrm{i})$; *d) $|z|-\mathrm{i}z=1-2\mathrm{i}$.

7*. Să se rezolve sistemul de ecuații $(z_1,\ z_2\in\mathbf{C})$:

a) $\begin{cases}2z_1-(3+3\mathrm{i})z_2=3-\mathrm{i},\\(1-\mathrm{i})z_1-3\mathrm{i}z_2=-\mathrm{i};\end{cases}$ b) $\begin{cases}2z_1-(2+\mathrm{i})z_2=-\mathrm{i},\\\overline{(4+2\mathrm{i})z_1}-5z_2=-1-2\mathrm{i}.\end{cases}$

8. Să se determine toate numerele complexe z care satisfac condițiile:

a) $\mathrm{Re}\,z=1,\ |z|=\sqrt{2}$; b) $\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z=2,\ |\bar{z}|=1$; c) $\mathrm{Im}\,z=3,\ |z-\mathrm{i}|=2$.

B

9. Să se calculeze:

a) $(3+2\mathrm{i})(-2+3\mathrm{i})^{-1}\cdot(-\mathrm{i})+1$; b) $(\overline{2+\mathrm{i}})(5+\mathrm{i})^{-1}-(7+5\mathrm{i})^2\cdot(3-\mathrm{i})^{-1}$;

c) $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$; d) $\dfrac{1+(1+\mathrm{i})^5}{-1+(1-\mathrm{i})^5}$.

10. Să se rezolve în **C** ecuația:

a) $z^4-z^2-2=0$; b) $z^4+z^2-12=0$; c) $z^4+12z^2+35=0$.

11. Să se calculeze:

a) $(z-1-\mathrm{i})(z-1+\mathrm{i})(z+1+\mathrm{i})(z+1-\mathrm{i})$;

b) $(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(z-1)(z+1)$;

c) $(b\varepsilon^2+a\varepsilon)(a\varepsilon^2+b\varepsilon)$, dacă $\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$;

d) $(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)$, dacă $\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

12. Să se demonstreze egalitatea:

a) $(1+\mathrm{i})^{8n}=2^{4n},\ n\in\mathbb{Z}$; b) $(1+\mathrm{i})^{4n}=(-1)^n\cdot2^{2n},\ n\in\mathbb{Z}$.

13. Să se arate că următoarele numere sînt reale:

a) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}(z-\bar{z})$; b) $\dfrac{z-1}{\mathrm{i}(z+1)}$, dacă $z\cdot\bar{z}=1$; c) $(3+2\mathrm{i})^{4n}+(2+3\mathrm{i})^{4n}$.

14. Să se determine numărul complex z, astfel încît $|z+\mathrm{i}|=|z+1|=|z+\mathrm{i}z|$.

15. Fie $z=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\alpha-(\alpha+1)\mathrm{i}}$. Să se determine toate numerele $\alpha\in\mathbb{R}$, astfel încît $z\in\mathbb{R}$.

16. Să se arate că $\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$, $\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

§2 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe. Forma trigonometrică a unui număr complex

Interpretarea geometrică a numerelor complexe, propusă de C. F. Gauss la începutul secolului al XIX-lea, a făcut posibil ca ele să fie aplicate în diverse domenii.

Fixăm în plan un sistem de axe ortogonale. Oricărui număr complex $z = x + iy$ i se asociază în acest plan punctul $M(x, y)$, şi invers. Punctul M se numeşte ***imaginea*** numărului z, iar z se numeşte ***afixul*** punctului M (fig.6.1). Astfel se stabileşte o bijecţie între mulţimea numerelor complexe **C** şi mulţimea punctelor din plan, ceea ce permite să identificăm numărul complex $z = x + iy$ cu punctul $M(x, y)$. În baza acestei convenţii (identificări) vom putea spune „punctul $z = x + iy$” în loc de „numărul complex z”, iar planul respectiv îl vom numi ***plan complex***. În plus, observăm că mulţimea numerelor reale se reprezintă prin punctele axei Ox, pe care o vom numi ***axă reală***, iar mulţimea numerelor pur imaginare – de punctele axei Oy, pe care o vom numi ***axă imaginară***.

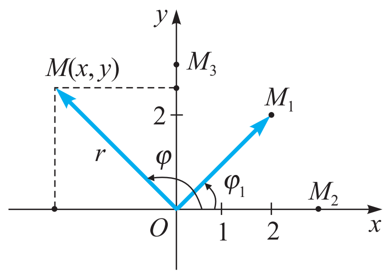


Fig. 6.1

Exemplu

Numerele $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 3$, $z_3 = 3i$ sînt reprezentate de punctele $M_1(2, 2)$, $M_2(3, 0)$ şi respectiv $M_3(0, 3)$ (fig. 6.1).

Numerele complexe pot fi reprezentate geometric şi prin vectori dintr-un plan dotat cu un sistem de axe ortogonale. Anume numărul complex $z = x + iy$ se identifică cu vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde O este originea sistemului de coordonate, iar $M(x, y)$ este imaginea numărului z (fig. 6.1). Evident, $|z| = |\overrightarrow{OM}|$. Astfel, suma numerelor complexe $t_1 = a + bi$, $t_2 = c + di$ (afixele punctelor $A_1(a, b)$, $A_2(c, d)$) poate fi realizată ca suma vectorilor $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, întrucît coordonatele punctului A_3, unde $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, sînt $a + c$ şi $b + d$ (fig. 6.2).

Diferenţa $t_1 - t_2$ se identifică cu vectorul $\overrightarrow{OA_4}$, unde $\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}$ (fig. 6.2).

Deci, $|t_1 - t_2| = A_2A_1$, adică *distanţa dintre punctele* A_1 *şi* A_2 *este egală cu modulul diferenţei* $t_1 - t_2$.

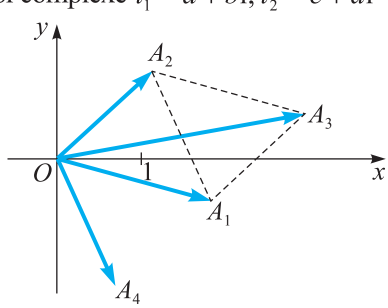


Fig. 6.2

Proprietăţile modulului numărului complex sînt date de

Teorema 2. Pentru orice $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$:

1° $|z| = |\bar{z}| = |-z|$; **2°** $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$; **3°** $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|$;

4° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; **5°** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \ne 0$; **6°** $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$.

Demonstrație

Proprietatea **1°** se obține din definiția numărului conjugat şi din definiția modulului. Proprietățile **2°**, **3°**, **6°** rezultă din relația dintre lungimile laturilor unui triunghi, care pot fi $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1+z_2|$, sau, dacă vectorii sînt coliniari, din regulile de adunare a acestora. Proprietățile **4°**, **5°** vor fi demonstrate mai jos. ►

Spre deosebire de adunarea şi scăderea numerelor complexe, operațiile de înmulțire şi împărțire nu pot fi ilustrate simplu, prin efectuarea unor operații cu vectorii respectivi. În continuare vom expune reprezentarea numerelor complexe sub formă trigonometrică, care facilitează efectuarea operațiilor de înmulțire, împărțire, ridicare la putere a numerelor complexe.

Reamintim că modulul numărului complex $z=x+\mathrm{i}y$ este $|x+\mathrm{i}y|=\sqrt{x^2+y^2}=r.$

Prin ***argument*** al numărului complex $z=x+\mathrm{i}y,\ z\neq 0$, vom înțelege mărimea unghiului format de vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde O este originea sistemului de coordonate, iar $M(x,y)$ este imaginea numărului z, şi de semiaxa pozitivă Ox. Unui număr complex $z,\ z\neq 0,$ îi corespunde o mulțime infinită de valori ale argumentului, care diferă între ele prin $2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$ Menționăm că *argumentul numărului complex 0 nu este definit*. Există un unic argument φ al numărului dat $z=x+\mathrm{i}y$, care satisface condiția $-\pi<\varphi\leq\pi.$ Acesta se numeşte ***argument principal*** (sau ***redus***) şi se notează **arg *z***. Orice argument al numărului z se notează $\mathrm{Arg}\, z$ şi deci se poate scrie: $\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Observație. În unele manuale se foloseşte notația $\mathrm{Arg}\, z=\{\arg z+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\},$ iar condiția $\arg z\in(-\pi,\ \pi]$ se înlocuieşte cu $\arg z\in[0,\ 2\pi).$

Exemplu

Numărul $z_1=2+2\mathrm{i}$ are modulul $|z_1|=OM_1=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ şi argumentul principal $\arg z_1=\frac{\pi}{4}$, iar valori ale $\mathrm{Arg}\, z_1$ sînt $-\frac{7\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4}$ sau orice număr de forma $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Evident, pentru $z=a+b\mathrm{i},\ b\neq 0,$ avem $\arg\bar{z}=-\arg z.$ Argumentul principal al numărului $z=a+b\mathrm{i},\ z\neq 0,$ poate fi determinat cu ajutorul funcției arccos:

$$\arg z=\begin{cases}\arccos\dfrac{a}{r}, & \text{dacă } b\geq 0\\ -\arccos\dfrac{a}{r}, & \text{dacă } b<0,\ r=\sqrt{a^2+b^2}.\end{cases} \tag{1}$$

Exemple

1. $\arg(2-2\mathrm{i})=-\arccos\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=-\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\pi}{4};$

2. $\arg(-2+3\mathrm{i})=\arccos\dfrac{-2}{\sqrt{13}}.$

Fie $z=x+\mathrm{i}y,\ \ z\neq 0,$ un număr complex arbitrar, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ – modulul lui, φ – un argument al său. Folosind definițiile funcțiilor sin şi cos ale unui unghi arbitrar, obținem relațiile: $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi.$ Atunci

$$z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi).$$

Expresia $r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ se numeşte ***forma trigonometrică*** a numărului complex z.

Întrucît argumentul numărului complex se determină neunivoc, pentru numerele complexe scrise sub formă trigonometrică avem:

$$r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)=r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=r_2,\\ \varphi_1=\varphi_2+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}\qquad(2)$$

Exercițiu rezolvat

Să se scrie sub formă trigonometrică numerele:

a) $z_1=1+\mathrm{i};$ b) $z_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2};$ c) $z_3=-1;$ d) $z_4=2-3\mathrm{i}.$

Rezolvare:

a) Calculăm modulul şi un argument al lui z_1:

$|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},$ iar $\arg z_1=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}.$

Astfel, $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (expresia din membrul drept este forma trigonometrică a numărului z_1).

b) Analog, $|z_2|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1,$ iar conform (1) obținem $\arg z_2=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}.$

Prin urmare, $-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$

c) Pentru z_3 obținem: $|z_3|=1,\ \ \arg z_3=\arccos(-1)=\pi,$ deci $-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi.$

d) Pentru $z_4=2-3\mathrm{i}$ avem: $|z_4|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13},\ \ \arg z_4=-\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}.$

Aşadar, $2-3\mathrm{i}=\sqrt{13}\left[\cos\left(-\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\right].$

Observație. Forme trigonometrice pentru numerele complexe z_1, z_2, z_3 considerate anterior sînt (cu alte valori ale argumentului) de asemenea:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{4}\right),\ z_2=\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right),\ z_3=\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi),$$

însă, de regulă, în forma trigonometrică se indică argumentul principal al numărului complex.

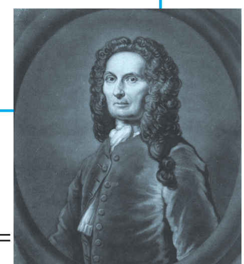
Teorema ce urmează determină formulele pentru calculul produsului, cîtului, puterii cu exponent întreg a numerelor complexe reprezentate sub formă trigonometrică.

Teorema 3. Dacă $z_1, z_2, z \in \mathbf{C}^*$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, atunci:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \qquad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \qquad (4)$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{Z} \text{ (formula lui Moivre[1]).} \qquad (5)$$


Abraham de Moivre

Demonstrație

Pentru formula (3) avem:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \mathrm{i}^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 \cdot r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] =$$
$$= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Similar se obține formula (4) pentru cîtul numerelor.

Vom demonstra formula (5) întîi pentru $n \in \mathbb{N}$, prin metoda inducției matematice.

1. Evident, ea se verifică pentru $n = 0,\ n = 1$.

2. Din presupunerea că formula are loc pentru $n = k$, adică $(r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi))^k = r^k \cdot (\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi)$, pentru $n = k + 1$ obținem:

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = (r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi))^k \cdot r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r^k(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi) \cdot r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) =$$
$$= r^{k+1}(\cos(k\varphi + \varphi) + \mathrm{i}\sin(k\varphi + \varphi)) = r^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + \mathrm{i}\sin(k+1)\varphi).$$

3. În baza metodei inducției matematice, formula (5) are loc pentru orice n natural.

Pentru $n = -k,\ k \in \mathbb{N}^*$, formula (5) se verifică astfel:

$$z^n = z^{-k} = \frac{1}{z^k} = \frac{1(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)}{r^k(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi)} = r^{-k}(\cos(0 - k\varphi) + \mathrm{i}\sin(0 - k\varphi)) =$$
$$= r^{-k}(\cos(-k\varphi) + \mathrm{i}\sin(-k\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi). \quad ▶$$

Observații. **1.** Din (3) și (4) rezultă respectiv proprietățile **4°** și **5°** ale modulului numărului complex, menționate în teorema 2.

2. Din relațiile (3)–(5), respectiv, rezultă: argumentul produsului este egal cu suma argumentelor factorilor; argumentul cîtului este egal cu diferența dintre argumentul deîmpărțitului și argumentul împărțitorului; argumentul puterii z^n este egal cu produsul dintre exponentul întreg n al puterii și un argument al bazei z. De menționat că aici egalitățile au loc cu exactitatea unui termen multiplu al lui 2π.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $A = \dfrac{2(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^{30}}$.

[1] Abraham de Moivre (1667–1754) – matematician englez de origine franceză.

Rezolvare:

Pentru a efectua calculele, este comod să scriem numerele sub formă trigonometrică:

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Folosind formulele (3) – (5), obținem:

$$A=\frac{4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^{30}}=\frac{4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]}{2^{30}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\cdot 30\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\cdot 30\right)\right]}=$$

$$=\frac{2^{-\frac{55}{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]}{\cos 25\pi+\mathrm{i}\sin 25\pi}=-2^{-\frac{55}{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]=2^{-\frac{55}{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

2. Să se arate că:

$$\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x;$$

$$\sin 5x=5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x.$$

Rezolvare:

$$\cos 5x+\mathrm{i}\sin 5x=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^5=\cos^5 x+5\cos^4 x\cdot\mathrm{i}\cdot\sin x+10\cos^3 x\cdot\mathrm{i}^2\cdot\sin^2 x+$$

$$+10\cos^2 x\cdot\mathrm{i}^3\cdot\sin^3 x+5\cos x\cdot\mathrm{i}^4\cdot\sin^4 x+\mathrm{i}^5\sin^5 x=$$

$$=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x+\mathrm{i}(5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x).$$

Egalînd părțile reale şi respectiv cele imaginare, obținem formulele menționate.

Se ştie că rădăcina de ordinul n a numărului real a (în caz că există) este un număr real b, astfel încît $b^n=a$. Acest concept se generalizează pentru numerele complexe.

Definiție. Numărul complex u se numeşte **rădăcină de ordinul** n, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$, a numărului z dacă $u^n=z$.

Exemple

Rădăcini de ordinul 3 ale numărului 1 sînt 1, $-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, deoarece $1^3=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$, iar rădăcini de ordinul doi ale numărului 1 sînt ± 1.

Dacă numărul complex este scris sub formă trigonometrică, atunci rădăcinile lui de ordinul n se determină relativ uşor.

Observație. Dacă n parcurge toate valorile din mulțimea $\{k, k+1, ..., m\}$, $k, m\in\mathbb{Z}$, $k<m$, atunci vom nota $n=\overline{k, m}$.

Teorema 4. Există n rădăcini distincte de ordinul n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ale oricărui număr complex nenul z. Anume dacă $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, atunci mulțimea tuturor rădăcinilor de ordinul n ale lui z este

$$\left\{ \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \middle| \, k = \overline{0, n-1} \right\}. \qquad (6)$$

Demonstrație

Fie $u = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ o rădăcină de ordinul n a lui z, adică $u^n = z$, ρ şi ψ rămînînd a fi determinate.

În baza formulei lui Moivre, avem $\rho^n(\cos n\psi + \mathrm{i}\sin n\psi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, iar din (2) obținem $\rho^n = r$ şi $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Din prima relație avem $\rho = \sqrt[n]{r}$ (amintim că $r \in \mathbb{R}_+^*$, deci $\sqrt[n]{r}$ este un număr real pozitiv unic determinat), iar din a doua obținem $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $k = \overline{0, n-1}$ se obțin n valori distincte pentru u:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right],$$

deoarece aceste numere se reprezintă (verificați!) în planul complex prin vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi (dacă $n \geq 3$), înscris în cercul de centru O (originea sistemului de coordonate) şi rază $\sqrt[n]{|z|}$. Pentru celelalte valori întregi ale lui k avem $k = n \cdot q + t$, $0 \leq t \leq n-1$, şi din periodicitatea funcțiilor trigonometrice obținem:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi q + 2\pi\frac{t}{n} \right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi q + 2\pi\frac{t}{n} \right) \right] = u_t, \quad t = \overline{0, n-1}.$$

Prin urmare, oricare u_k, $k \in \mathbb{Z}$, este egal cu un careva u_t, unde $0 \leq t \leq n-1$. Astfel se obțin exact n rădăcini distincte de ordinul n ale lui z, $z \neq 0$. ►

Observație. Argumentele numerelor din (6) nu sînt neapărat argumentele principale ale acestora.

Exerciții rezolvate

1. Utilizînd teorema 4, să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului -4.

Rezolvare:

Scriem numărul -4 sub formă trigonometrică: $-4 = 4 \cdot (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$. Din (6) obținem $u_0 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} \right) = 2\mathrm{i}$, $u_1 = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2\pi}{2} \right) = -2\mathrm{i}$. Aşadar, rădăcinile de ordinul doi ale numărului -4 sînt $\pm 2\mathrm{i}$.

2. Să se determine şi să se ilustreze geometric rădăcinile de ordinul trei ale numărului 2i.

Rezolvare:

Deoarece $2\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$, din (6) obţinem:

$$u_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),$$

$$u_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),$$

$$u_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)=-\sqrt[3]{2}\cdot\mathrm{i}.$$

Aceste numere se reprezintă geometric prin vîrfurile unui triunghi echilateral (fig. 6.3, a)).

3. Să se determine rădăcinile de ordinul n ale numărului 1.

Rezolvare:

Pentru rădăcinile de ordinul n ale numărului 1 obţinem:

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n},\quad k=\overline{0,n-1}.$$

În figurile 6.3 b), c) sînt reprezentate geometric rădăcinile de ordinul patru ale numărului 1: $\{\pm1,\pm\mathrm{i}\}$ şi respectiv rădăcinile de ordinul şase ale numărului 1:

$$\left\{\pm1,\ \frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

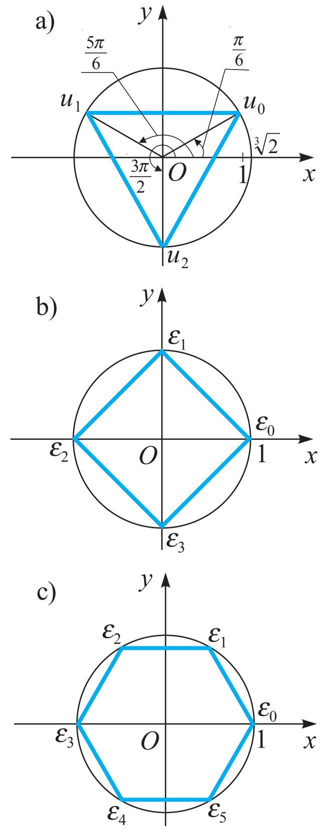


Fig. 6.3

Rădăcinile de ordinul doi, α_1, α_2, ale numărului complex nenul $a+b\mathrm{i}$ sînt numere opuse şi pot fi determinate fără a utiliza forma trigonometrică a acestuia:

1) pentru $b\neq0$, $\alpha_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$;

2) pentru $b=0$, $\alpha_{1,2}=\begin{cases}\pm\sqrt{a}, & \text{dacă } a\geq0\\ \pm\mathrm{i}\sqrt{|a|}, & \text{dacă } a<0,\end{cases}$

unde $\mathrm{sgn}\,b=\begin{cases}1, & \text{dacă } b>0\\ 0, & \text{dacă } b=0\\ -1, & \text{dacă } b<0.\end{cases}$

Exerciții rezolvate

1. Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului $40-42\mathrm{i}$.

Rezolvare:

Cum $b=-42<0$, obținem $\alpha_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2+42^2}+40)}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2+42^2}-40)}\right)$.

Deci, $\{-7+3\mathrm{i},\ 7-3\mathrm{i}\}$ este mulțimea rădăcinilor de ordinul doi ale numărului $40-42\mathrm{i}$.

2. Să se rezolve în **C** ecuația $z^2-3z+3-\mathrm{i}=0$.

Rezolvare:

Aplicăm formulele cunoscute pentru determinarea soluțiilor ecuației de gradul II. Discriminantul este $-3+4\mathrm{i}$, iar rădăcinile de ordinul doi ale numărului complex $-3+4\mathrm{i}$ sînt $1+2\mathrm{i}$ și $-1-2\mathrm{i}$.

Deci, soluțiile ecuației sînt $z_1=\frac{3+(1+2\mathrm{i})}{2}$, $z_2=\frac{3-(1+2\mathrm{i})}{2}$.

Răspuns: $S=\{2+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}\}$.

Exerciții propuse

B

1. În planul complex construiți imaginile numerelor:
$-1,\ \mathrm{i},\ 1-\mathrm{i},\ -5\mathrm{i},\ 3,\ -3+\mathrm{i},\ -1-2\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i}\sqrt{2},\ \sqrt{2}-\mathrm{i}$.

2. Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului:

a) $-2\mathrm{i}$; b) $-5-12\mathrm{i}$; c) $48+14\mathrm{i}$;
d) $2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$; e) $1-2\mathrm{i}\sqrt{6}$; f) $-1+2\mathrm{i}\sqrt{6}$.

3. Să se rezolve în **C** ecuația:

a) $z^2+4z+4-2\mathrm{i}=0$; b) $\mathrm{i}\cdot z^2-(4+\mathrm{i})z+6+12\mathrm{i}=0$;
c) $z^2+(3-2\mathrm{i})z-1-3\mathrm{i}=0$; d) $(1+\mathrm{i})z^2+(2+\mathrm{i})z-7-\mathrm{i}=0$;
e) $(2+\mathrm{i})z^2-(5-\mathrm{i})z+2-2\mathrm{i}=0$; f) $z^2-(48+14\mathrm{i})=0$.

4. Fie $\alpha+\beta\mathrm{i}$ și $-\alpha-\beta\mathrm{i}$ rădăcinile de ordinul doi ale numărului z. Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului $-z$.

5. Să se reprezinte sub formă trigonometrică numărul:

a) -5; b) $-3\mathrm{i}$; c) $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$;
d) $2-2\mathrm{i}$; e) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$; f) $-4\left(\cos\frac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)$;
g) $3+4\mathrm{i}$; h) $\sin\varphi-\mathrm{i}\cos\varphi$; i) $\left(\frac{1}{\mathrm{i}-1}\right)^{100}$.

6. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{24}\right)}{\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}}$; b) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3\cdot\overline{(1+\mathrm{i})^7}$; c) $\left(\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{20}$.

7. Să se determine rădăcinile:

a) de ordinul trei ale numărului i;

b) de ordinul trei ale numărului –27;

c) de ordinul patru ale numărului $2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$;

d) de ordinul patru ale numărului –1;

e) de ordinul şase ale numărului $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$.

8. Să se determine numerele complexe z care satisfac condiţiile:

a) $\operatorname{Im} z \geq 1,\ |z| \leq 1$;

b) $\operatorname{Re}(\mathrm{i}z)=1,\ |z+\mathrm{i}|=2$.

§3 Aplicaţii ale numerelor complexe

3.1. Rezolvarea ecuaţiilor de forma $mz^k+p=0,\ m\in \mathbf{C}^*,\ p\in \mathbf{C},\ k\in \mathbb{N}^*$

Definiţie. Ecuaţiile de forma $mz^k+p=0,\ m\in \mathbf{C}^*,\ p\in \mathbf{C},\ k\in \mathbb{N}^*$, se numesc **ecuaţii binome**.

Ecuaţia binomă $mz^k+p=0$ este echivalentă cu ecuaţia $z^k=-\dfrac{p}{m}$. De aceea, pentru a o rezolva, determinăm toate rădăcinile de ordinul k, $k\geq 2$, ale numărului $-\dfrac{p}{m}$.

Exerciţiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbf{C}$ ecuaţia $2z^5=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Rezolvare:

$2z^5=1+\mathrm{i}\sqrt{3} \Leftrightarrow z^5=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Pentru a determina rădăcinile de ordinul cinci ale numărului complex $\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, scriem acest număr sub formă trigonometrică.

Obţinem $r=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ şi $\arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$.

Argumentul principal este $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, deci $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Aplicînd (7) din § 2, obţinem:

$$z_0=\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5}=\cos\frac{\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{15};\quad z_1=\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\cos\frac{7\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{15};$$

$$z_2=\cos\frac{13\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{15};\quad z_3=\cos\left(-\frac{11\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{11\pi}{15}\right);\quad z_4=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Răspuns: $S=\left\{\cos\dfrac{\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{15},\ \cos\dfrac{7\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{15},\ \cos\dfrac{13\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\dfrac{13\pi}{15},\ \cos\left(-\dfrac{11\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{11\pi}{15}\right),\ \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$.

3.2. Rezolvarea ecuațiilor de forma $mz^{2k}+pz^{k}+q=0,\ m\in\mathbf{C}^{*},\ p, q\in\mathbf{C},\ k\in\mathbb{N}^{*}$

Definiție. Ecuațiile de forma $mz^{2k}+pz^{k}+q=0,\ m\in\mathbf{C}^{*},\ p,q\in\mathbf{C},\ k\in\mathbb{N}^{*}$, se numesc **ecuații trinome**.

Prin substituția $z^{k}=u$, ecuația trinomă se reduce la sistemul $\begin{cases} mu^{2}+pu+q=0, \\ z^{k}=u. \end{cases}$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în **C** ecuația $6z^{12}-z^{6}-1=0$.

Rezolvare:

Notăm $z^{6}=u$ și obținem ecuația $6u^{2}-u-1=0$, ale cărei soluții sînt $u_{1}=\frac{1}{2},\ u_{2}=-\frac{1}{3}$. Pentru z obținem două cazuri: $z^{6}=\frac{1}{2}$ sau $z^{6}=-\frac{1}{3}$. Reprezentăm numerele $\frac{1}{2}$ și $-\frac{1}{3}$ sub formă trigonometrică: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0),\ -\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$. În baza formulei (6) din § 2, obținem:

$$z\in\left\{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{2\pi k}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{6}\right)\Big|\, k=\overline{0,5}\right\}\text{ sau } z\in\left\{\sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)\Big|\, k=\overline{0,5}\right\}.$$

Răspuns: $S=\left\{-\sqrt[6]{\frac{1}{2}},\ \sqrt[6]{\frac{1}{2}},\ \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\right.$

$\left.\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ -\mathrm{i}\sqrt[6]{\frac{1}{3}},\ \mathrm{i}\sqrt[6]{\frac{1}{3}},\ \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right),\ \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right\}.$

3.3. Rezolvarea ecuațiilor reciproce

Vom examina ecuații de forma $ax^{3}+bx^{2}+bx+a=0,\ \ ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+bx+a=0$, $a, b, c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, care sînt ***ecuații reciproce*** de gradul trei și respectiv patru.

Exemplu

Ecuația $x^{4}-3x^{3}+4x^{2}-3x+1=0$ este ecuație reciprocă de gradul patru.

La rezolvarea acestor ecuații se va ține cont de următoarele *proprietăți*:

1° Ecuația $ax^{3}+bx^{2}+bx+a=0$ are soluție numărul $x_{0}=-1$.

2° Prin substituția $y=x+\frac{1}{x}$, ecuația $ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+bx+a=0$ se reduce la un sistem format dintr-o ecuație de gradul II în y și o totalitate de două ecuații de gradul II în x.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în **C** ecuația $x^{4}-3x^{3}+4x^{2}-3x+1=0$.

Rezolvare:

Se observă că $x=0$ nu este soluție, de aceea, împărțind la x^{2}, obținem ecuația echivalentă: $x^{2}-3x-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^{2}}+4=0 \Leftrightarrow x^{2}+\frac{1}{x^{2}}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$

Notăm $y = x + \frac{1}{x}$, atunci $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$ şi obţinem ecuaţia $y^2 - 3y + 2 = 0$, cu soluţiile $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Revenind la necunoscuta x, avem: $\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = 1, \\ x + \frac{1}{x} = 2. \end{array}\right.$

Astfel, obţinem următoarea totalitate de ecuaţii de gradul II: $\left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = 0, \\ x^2 - 2x + 1 = 0. \end{array}\right.$

Deci, soluţiile ecuaţiei iniţiale sînt $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns: $S = \left\{1, \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3.4. Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie

Numerele complexe pot fi aplicate în acele domenii în care sînt examinate mărimi vectoriale. În acest caz, operaţiile asupra vectorilor, care se efectuează, de obicei, sub formă geometrică, se înlocuiesc cu operaţiile respective cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică sau trigonometrică, care se efectuează mai uşor.

Pentru comoditate, în continuare vom nota cu $z = x + \mathrm{i}y$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, ... afixele punctelor M, M_0, M_1, M_2, ..., respectiv.

a) Ecuaţia cercului de centru M_0 şi rază r este $|z - z_0| = r$, sau $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Într-adevăr, $M \in \mathscr{C}(M_0, r)$ dacă şi numai dacă $|\overrightarrow{MM_0}| = r$, adică $|z - z_0| = r$.

b) Inecuaţia ce determină discul de centru M_0 şi rază r este $|z - z_0| \le r$.

c) Inecuaţia ce determină inelul cuprins între cercurile concentrice $\mathscr{C}(M_0, r_1)$ şi $\mathscr{C}(M_0, r_2)$, $r_1 < r_2$, este $r_1 < |z - z_0| < r_2$ (fig. 6.4).

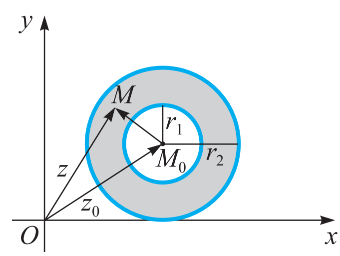


Fig. 6.4

d) Măsura unghiului $M_1M_2M_3$ admite reprezentarea $\mathrm{m}(\angle M_1M_2M_3) = \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + 2\pi k$, pentru un oarecare $k \in \mathbb{Z}$.

Formula se obţine din proprietatea

$$\arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_1 - z_2) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

(fig. 6.5).

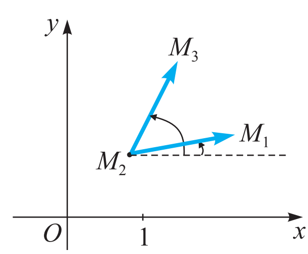


Fig. 6.5

Exerciții rezolvate

1. Să se scrie ecuația cercului de centru $M_0(1, -2)$ și rază 3.

Rezolvare:

Punctul M_0 este imaginea numărului $z_0 = 1 - 2\mathrm{i}$, deci $M \in \mathscr{C}(M_0, 3)$ dacă și numai dacă $|z - (1 - 2\mathrm{i})| = 3$, unde $z = x + \mathrm{i}y$ este afixul lui $M(x, y)$. Aplicînd formula modulului numărului complex, obținem: $\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Să se reprezinte în sistemul de axe ortogonale xOy locul geometric al punctelor $M(x, y)$ ale căror afixe $z = x + \mathrm{i}y$ satisfac condiția $|z - 1 + \mathrm{i}| \leq 3$.

Rezolvare:

$|z - 1 + \mathrm{i}| \leq 3 \Leftrightarrow |x + \mathrm{i}y - 1 + \mathrm{i}| \leq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)\cdot \mathrm{i}| \leq 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 9 = 3^2$.

Se obține discul de centru $A(1, -1)$ și rază 3 (fig. 6.6).

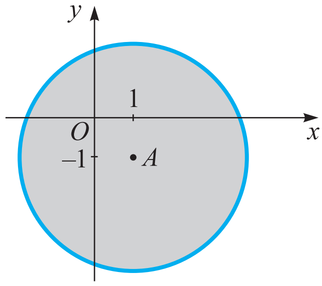


Fig. 6.6

Exerciții propuse

B

1. Să se rezolve în **C** ecuația:

a) $(1-\mathrm{i})z^6 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$; b) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z^5 = 1 + \mathrm{i}$; c) $z^6 - 7z^3 + 6 = 0$;

d) $z^8 + z^4 - 2 = 0$; e) $z^{10} + z^5 - 6 = 0$.

2. Să se rezolve în **C** ecuația $\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right) + 1 = 0$.

3. Să se arate că soluțiile ecuației $(z+\mathrm{i})^n + (z-\mathrm{i})^n = 0$ sînt numere reale.

4. Să se rezolve în **C** ecuația $(z+1)^6 = (z-1)^6$.

5. Să se rezolve în **C** ecuația reciprocă:

a) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$; b) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$; c) $x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Să se calculeze:

a) $(2 - 3\mathrm{i}) + (-1 + \mathrm{i})$; b) $(4 - 3\mathrm{i}) - (2 - 5\mathrm{i})$; c) $(1 + 3\mathrm{i})\cdot(2 + 4\mathrm{i})$;

d) $(2 - \mathrm{i}) : (3 - 4\mathrm{i})$; e) $(-\mathrm{i})^3$; f) $(-\mathrm{i})^4$; g) i^{13}.

2. Să se arate că numărul este real:

a) $(1-\mathrm{i})^{24}$; b) $\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}} - \frac{1}{1+\mathrm{i}}\right)^2$; c) $\frac{1}{1+2\mathrm{i}} + \frac{1}{1-2\mathrm{i}}$; d) $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^6$.

3. Să se rezolve în **C** ecuația: a) $z^2 = -9$; b) $z\bar{z} + 2(z - \bar{z}) = 20 + 8i$.

4. Să se calculeze modulul numărului $z = \frac{8+i}{7-4i}$.

5. Fie $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. Să se calculeze:

a) $\bar{z}_1 \cdot z_2$; b) $(z_1 : \bar{z}_2)^2$.

6. Să se calculeze:

a) $(1+i)(2+i) + \frac{5}{1+2i}$; b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} - (1-i)^{12}$;

c) $\frac{(1+2i)^3 - (1-2i)^3}{(2-i)^2 - (2+i)^2}$; d) $\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$.

7. Să se determine $z = x + iy$, dacă $2z = |z| + 2i$.

B

8. Știind că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

9. Să se determine partea reală a numărului $(\sqrt{3} + i)^6$.

10. Să se rezolve în **C** ecuația:

a) $z^2 - 3|z| + 3 = 0$; b) $|z| - 2z + 2i = 0$; c) $\begin{cases} |z| = |z - 2i|, \\ |z - i| = |z - 1|; \end{cases}$

d) $z^2 + |z| = 0$; e) $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$.

11. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul:

a) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$; b) $\sin\alpha - i\cos\alpha,\ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

12. Să se determine rădăcinile de ordinul trei ale numărului:

a) $-2 + 2i\sqrt{3}$; b) $-\frac{3}{8}(\sqrt{3} + i)$.

13. Să se calculeze:

a) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12}$; b) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12} + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}$; c) $\frac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^2}$.

14. Să se determine n, $n \in \mathbb{N}$, pentru care este adevărată egalitatea $(1+i)^n = (1-i)^n$.

15. Fie numerele complexe $z_0 = 1 + i$, $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = 3 + i$ și M_0, M_1, M_2, M_3 respectiv imaginile lor.

a) Să se calculeze $|z_1 - z_0|$, $|z_2 - z_0|$, $|z_3 - z_0|$.

b) Să se determine care dintre punctele M_1, M_2, M_3 aparțin discului de centru M_0 și rază 2.

16*. Să se arate că este adevărată identitatea $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$:

a) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$;

b) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

17*. Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ este adevărată egalitatea:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n\pi}{4}$; b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

A

1. Calculați: ②

a) $(2-3\mathrm{i})-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)$; b) $(5-2\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{2}\mathrm{i}\right)$; c) $\frac{2-3\mathrm{i}}{7+\mathrm{i}}$.

2. Rezolvați în **C** ecuația $(3+2\mathrm{i})z+5z=4$. ①

3. Determinați numerele reale x și y, astfel încît $(2+3\mathrm{i})x+(5y-2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=3x-4\mathrm{i}$. ②

4. Rezolvați în **C** ecuația $7z^2-2z+1=0$. ②

5. Fie $z=-1-\mathrm{i}$. ③

a) Calculați z^2.

b) *Indicați litera corespunzătoare variantei corecte.*

Numărul z este soluție a ecuației

A $x^2+(2+\mathrm{i})x-3\mathrm{i}$. **B** $x^2+4x+1=0$.

C $x^2+(2+2\mathrm{i})x+2\mathrm{i}=0$. **D** $x^2+1=0$.

Timp efectiv de lucru: 90 de minute

B

1. Calculați: ①

a) $(1-2\mathrm{i})^2-\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$; b) $(5-\mathrm{i})^3-(\overline{2-3\mathrm{i}})(7-\mathrm{i})$; c) $\frac{3-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-7}$.

2. Rezolvați în **C** ecuația $2z^2+\sqrt{7}\,z+7=0$. ①

3. Determinați numerele reale x și y, astfel încît ①

$$(x+2\mathrm{i})(2+y\mathrm{i})-x(\sqrt{2}-3\mathrm{i})=-x(1+\sqrt{2})+8x\mathrm{i}.$$

4. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy locul geometric al punctelor $M(x, y)$ ale căror afixe $z=x+\mathrm{i}y$ satisfac condiția $1\le|z-2\mathrm{i}|\le 3$. ①

5. Determinați $z=x+\mathrm{i}y$, dacă $1-z-z\bar{z}=\mathrm{i}$. ①

6. Calculați $\frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{12}}{(-2+2\mathrm{i})^5}$. ②

7. Rezolvați în **C** ecuația $2z^3=3\mathrm{i}$. ①

8. Rezolvați în $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ sistemul de ecuații $\begin{cases}(1+\mathrm{i})z_1+(1-\mathrm{i})z_2=1+\mathrm{i},\\(1-\mathrm{i})z_1+(1+\mathrm{i})z_2=1+3\mathrm{i}.\end{cases}$ ②

Numere complexe

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbf{C}$ — **Numere complexe** — $\mathbf{C}$

Forma algebrică

$z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$

Operații

$a + bi + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

$\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$

Proprietăți

$\bar{z} = a - bi$

Pentru orice $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$:

1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

2° $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3° $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2 \neq 0$ (deci și $\bar{z}_2 \neq 0$)

4° $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

5° $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

6° $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

7° $\bar{\bar{z}} = z$

Modulul

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proprietăți

1° $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

2° $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

3° $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$

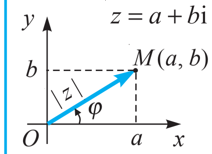
4° $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

5° $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0$

6° $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

Reprezentarea geometrică

$z = a + bi$



$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

φ – argument al numărului z, $\arg z \in (-\pi, \pi]$

Forma trigonometrică

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$r \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi \in \mathbb{R},\ \varphi = \arg z$.

Operații

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{Z}$

Rădăcinile de ordinul n, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, ale numărului z

$$\alpha_k \in \left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1}\right\}$$

Rădăcinile de ordinul 2 ale numărului $z = a + bi$

1) Pentru $b \neq 0$,

$$\alpha_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}\,b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right);$$

2) pentru $b = 0$, $\alpha_{1,2} = \begin{cases} \pm\sqrt{a}, & \text{dacă } a \geq 0 \\ \pm i\sqrt{|a|}, & \text{dacă } a < 0, \end{cases}$

unde $\mathrm{sgn}\,b = \begin{cases} 1, & \text{dacă } b > 0 \\ 0, & \text{dacă } b = 0 \\ -1, & \text{dacă } b < 0. \end{cases}$

Aplicații

Ecuații binome

$mz^k + p = 0 \Leftrightarrow z$ – rădăcină de ordinul k a lui $-\dfrac{p}{m}$

Ecuații trinome

$mz^{2k} + pz^k + q = 0,\ m \in \mathbf{C}^*$,

$p, q \in \mathbf{C} \Leftrightarrow \begin{cases} mu^2 + pu + q = 0 \\ z^k = u \end{cases}$

În geometrie

Ecuații reciproce

Modulul

7 Elemente de algebră superioară

Obiective

- identificarea tipurilor de matrice, utilizarea terminologiei aferente noțiunii de matrice în diverse contexte;
- aplicarea operațiilor cu matrice, inclusiv cu matricea inversă, a proprietăților acestora în diverse contexte, *inclusiv la rezolvarea ecuațiilor matriciale;
- recunoașterea în diverse situații a determinanților de ordinele 2, 3, calculul lor prin diferite metode; *aplicarea proprietăților determinanților la calculul determinanților de ordin mai mare decît trei;
- rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, inclusiv a celor omogene, prin metoda lui Cramer, metoda lui Gauss, *metoda matricială.

§1 Matrice

1.1. Noțiuni generale

Două întreprinderi produc înghețată. Pentru aceasta ele folosesc 4 componente principale: lapte, frișcă, zahăr și cacao. Prima întreprindere folosește zilnic: 890 *l* de lapte, 400 kg de frișcă, 250 kg de zahăr, 90 kg de cacao. A doua întreprindere folosește zilnic 1500 *l* de lapte, 700 kg de frișcă, 400 kg de zahăr și 160 kg de cacao. O întreprindere de transport a încheiat un contract de livrare a acestor produse întreprinderilor menționate. Managerul firmei de transport a aranjat (pentru comoditate) aceste date în următorul tablou:

$$\begin{pmatrix} 890 & 400 & 250 & 90 \\ 1500 & 700 & 400 & 160 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Tablourile de acest fel (numite matrice) se aplică în matematică, economie și în alte domenii.

Definiție. Se numește **matrice** de tip (m, n) sau $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, un tablou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

format din $m \cdot n$ elemente aranjate în *m* linii și *n* coloane.

Se notează: $A = (a_{ij}),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$.

Elementele $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ formează **linia *i***, iar elementele $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ – **coloana *j*** a matricei (2). Deci, primul indice (i) al elementului a_{ij} (se citeşte a-i-j; de exemplu, a_{12} – a-unu-doi, şi nu a-doisprezece) indică linia, iar al doilea (j) – coloana în care el se află.

De exemplu, matricea (1) este de tip (2, 4), $a_{21} = 1500$, $a_{22} = 700$.

Exerciţiu. Scrieţi: a) elementele matricei (1); b) liniile şi coloanele matricei (1).

Mulţimea matricelor de tip (m, n) cu elemente din **C** (respectiv din $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$) se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ (respectiv $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$). În cele ce urmează vom studia matrice cu elemente numere complexe, dacă nu este specificat altceva.

Deosebim mai multe tipuri de matrice. Pentru $m = n$ matricea (2) are forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ şi se numeşte ***matrice pătratică de ordinul n***. În acest caz, mulţimile $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, ... se notează, respectiv, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ... În matricea pătratică, elementele $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ formează ***diagonala principală***, iar elementele $a_{1n}, a_{2\,n-1}, ..., a_{n-1\,2}, a_{n1}$ – ***diagonala secundară*** a acesteia. O matrice pătratică în care toate elementele situate deasupra (respectiv dedesubtul) diagonalei principale sînt egale cu 0 se numeşte ***inferior*** (respectiv ***superior***) ***triunghiulară***.

Pentru $n = 1$ matricea (2) ia forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ şi se numeşte ***matrice-coloană***, iar pentru $m = 1$ matricea (2) devine $A = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$ şi se numeşte ***matrice-linie***. Matricea pătratică de ordinul n de forma $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ se numeşte ***matrice unitate*** şi se mai notează cu I.

Dacă toate elementele matricei (2) sînt egale cu zero, atunci ea se numeşte ***matrice nulă*** sau ***zero*** şi se notează cu $O_{m,n}$ sau cu O, dacă tipul ei este subînţeles.

Exemple

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Matrice pătratică de ordinul 3

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

Matrice unitate de ordinul 3

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Matrice superior triunghiulară de ordinul 4

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3,2}$

Matrice nulă de tip $(3, 2)$

Dacă se ştie că matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, atunci o vom nota simplu $A = (a_{ij})$.

Definiţie. Două matrice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ se numesc **egale** dacă $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

1.2. Operații cu matrice

❑ *Adunarea matricelor, înmulțirea matricelor cu scalari, transpusa unei matrice*

Definiție. Fie $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$. Se numeşte **suma** matricelor A şi B matricea $D=(d_{ij})\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, unde $d_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Se scrie: $D=A+B$.

Exemplu

Suma matricelor $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & -4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1 & -7 & 5\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$ este matricea

$$D=\begin{pmatrix}2-1 & 1-7 & 3+5\\ -1+2 & 0-3 & -4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6 & 8\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}.$$

Definiție. Se numeşte **produsul** matricei $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ cu numărul $\alpha\in\mathbf{C}$ matricea $B=(b_{ij})\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, unde $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Se scrie: $B=\alpha A$.

Observații.* 1.** Cu $-A$ vom nota matricea $(-1)A$, fiindcă $A+(-1)A=(-1)A+A=O$. Matricea $-A$ se numeşte ***opusa matricei A.
Pentru suma $B+(-A)$ se va folosi notația $B-A$.
2. Suma matricelor se defineşte doar pentru oricare două matrice de acelaşi tip, însă orice matrice poate fi înmulțită cu un număr.

Exemplu

Pentru matricele din exemplul precedent avem:

$$2A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ -2 & 0 & -8\end{pmatrix},\quad \mathrm{i}B=\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & -7\mathrm{i} & 5\mathrm{i}\\ 2\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 0\end{pmatrix}.$$

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $2X-\mathrm{i}Y+3I_3$, dacă $X=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -\mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}0 & 1-\mathrm{i} & 0\\ 3 & \mathrm{i} & 1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$2X-\mathrm{i}Y+3I_3=\begin{pmatrix}2\mathrm{i} & 0 & -2\\ 6 & 2 & 0\\ 4 & -2\mathrm{i} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1-\mathrm{i} & 0\\ -3\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i}\\ 0 & -2\mathrm{i} & -4\mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+2\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & -2\\ 6-3\mathrm{i} & 6 & -\mathrm{i}\\ 4 & -4\mathrm{i} & 3-4\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

Definiție. Se numeşte **transpusa matricei** $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ matricea $B=(b_{ij})\in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$, astfel încît $b_{ij}=a_{ji},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Dacă matricea A este de tip (m, n), atunci transpusa ei este de tip (n, m) şi se notează ${}^tA$; coloanele (liniile) ei coincid cu liniile (coloanele) respective ale matricei A.

Exemple

1. Dacă $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$, atunci ${}^tA=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Să se determine dacă pot fi efectuate operaţiile $3\cdot{}^tA-5B$.

Întrucît matricele ${}^tA$ şi B (deci şi $3\cdot{}^tA$ şi $5B$) sînt de diferite tipuri, rezultă că nu poate fi calculată „matricea” $3\cdot{}^tA-5B$.

Proprietăţile operaţiilor cu matrice, definite mai sus, sînt expuse în

Teorema 1. Pentru orice matrice $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $D=(d_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ şi pentru orice numere $\alpha, \beta\in\mathbf{C}$, au loc egalităţile:

1° $A+B=B+A$ (adunarea este comutativă);

2° $A+(B+D)=(A+B)+D$ (adunarea este asociativă);

3° $A+O=O+A=A$ (matricea nulă O este element neutru la adunare);

4° $A+(-A)=-A+A=O$ (orice matrice are opusă);

5° $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

6° $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

7° $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$;

8° $1\cdot A=A$;

9° ${}^t(\alpha A)=\alpha\,{}^tA$;

10° ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$;

11° ${}^t({}^tA)=A$.

Demonstraţie

Pentru demonstraţie se aplică definiţia egalităţii matricelor şi proprietăţile operaţiilor cu numere complexe. Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea **2°**.

Matricea $F=A+(B+D)$ este de acelaşi tip ca şi matricea $F'=(A+B)+D$. Elementul f_{ij} al matricei F are forma $f_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+d_{ij})$, iar elementul respectiv f'_{ij} al matricei F' are forma $f'_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})+d_{ij}$. Deoarece adunarea numerelor complexe este asociativă, avem $f_{ij}=f'_{ij}$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$. Deci, matricele F şi F' sînt egale. ▶

Exerciţiu. Demonstraţi celelalte proprietăţi (în mod analog).

Proprietăţile operaţiilor cu matrice facilitează rezolvarea ***ecuaţiilor matriciale***, adică a ecuaţiilor cu necunoscuta o matrice.

Exerciţiu rezolvat

Să se rezolve ecuaţia $2\cdot{}^tA+3X-4I_3=O$, unde $A=\begin{pmatrix}2 & \mathrm{i} & 0\\ 1 & 0 & 3\mathrm{i}\\ -2 & 3 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

Rezolvare:

În baza proprietăţilor 2°–4° din teorema 1, putem trece termenii cunoscuţi în membrul drept, schimbîndu-le semnul.

Astfel,

$$3X=-2\cdot{}^tA+4I_3=-2\cdot\begin{pmatrix}2&1&-2\\ \mathrm{i}&0&3\\ 0&3\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&4\\-2\mathrm{i}&0&-6\\0&-6\mathrm{i}&2\mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-2&4\\-2\mathrm{i}&4&-6\\0&-6\mathrm{i}&4+2\mathrm{i}\end{pmatrix}.\ \text{Prin urmare, } X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-2&4\\-2\mathrm{i}&4&-6\\0&-6\mathrm{i}&4+2\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

❑ *Înmulțirea matricelor*

Vom ilustra operația de înmulțire a matricelor prin următorul exemplu.
O întreprindere mică produce jucării: păpuşi (p) şi bufoni (b).
Volumul vînzărilor (mii bucăți) în primul trimestru este reflectat de matricea:

$$A=\begin{array}{c c}\begin{array}{cc}\text{p}&\text{b}\end{array}&\\ \begin{pmatrix}5&3\\6&7\\4&8\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\text{ian.}\\\text{febr.}\\\text{mar.}\end{array}\end{array}$$

Prețul de vînzare al fiecărei jucării (în lei) este indicat în matricea $B=\begin{pmatrix}50\\90\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{p}\\\text{b}\end{array}.$

Determinăm venitul lunar pe care îl obține întreprinderea:

$v_{11}=5\cdot50+3\cdot90=520$ (în luna ianuarie),

$v_{21}=6\cdot50+7\cdot90=930$ (în luna februarie),

$v_{31}=4\cdot50+8\cdot90=920$ (în luna martie).

Se observă că v_{11} (respectiv v_{21}, v_{31}) se obține adunînd produsele elementelor liniei întîi (respectiv liniei a doua, a treia) cu elementele respective ale matricei-coloană B.

Matricea $V=\begin{pmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{pmatrix}$ reprezintă produsul matricei A cu matricea B.

Definiție. Fie matricele $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n,k}(\mathbf{C})$. Se numeşte **produsul** matricei A cu matricea B (în această ordine) matricea $D=(d_{sp})\in\mathcal{M}_{m,k}(\mathbf{C})$ ale cărei elemente d_{sp} se calculează astfel:

$$d_{sp}=a_{s1}b_{1p}+a_{s2}b_{2p}+\ldots+a_{sn}b_{np}=\sum_{i=1}^{n}a_{si}b_{ip},\quad s=\overline{1,m},\quad p=\overline{1,k}.$$

Se scrie: $D=A\cdot B$ sau $D=AB$.

Altfel spus, elementul d_{sp} al matricei produs este egal cu suma produselor elementelor liniei s a matricei A cu elementele respective ale coloanei p a matricei B (se mai spune că elementul d_{sp} este produsul dintre linia s a matricei A şi coloana p a matricei B).

Atenție. Produsul AB este definit numai în cazul în care numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B. Numărul de linii (coloane) ale matricei AB coincide cu numărul de linii (coloane) ale matricei A (B).

Exemplu

Să se calculeze $D = A \cdot B$, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

În baza definiției, obținem:

$$D = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 0\cdot 2 & 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ -2\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-3)\cdot 0 & (-2)\cdot 0 + 0\cdot 3 + (-3)\cdot 2 & (-2)\cdot(-2) + 0\cdot 1 + (-3)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observație. Spre deosebire de înmulțirea numerelor, operația de înmulțire a matricelor nu este comutativă. În exemplul **1** s-a calculat produsul AB, iar BA nici nu are sens (nu există). Dar şi în cazul în care ambele produse AB şi BA au sens, ele nu sînt neapărat egale.

De exemplu: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$

Proprietățile înmulțirii matricelor sînt expuse în

Teorema 2. Dacă pentru matricele A, B, D are sens expresia dintr-un membru al unei egalități de mai jos, atunci este definită expresia şi din celălalt membru şi are loc egalitatea respectivă:

1° $A(BD) = (AB)D$ (înmulțirea este asociativă);

2° $A(B + D) = AB + AD$, $(A + B)D = AD + BD$ (înmulțirea este distributivă față de adunare);

3° ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$;

4° $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, $I_n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (I_n este element neutru la înmulțire în $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$);

5° $A \cdot O = O$, $O \cdot A = O$.

Demonstrație

Aceste proprietăți se demonstrează în baza definiției egalității matricelor şi a definițiilor operațiilor cu matrice.

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea **1°**.

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$, $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{C})$ matrice arbitrare. Pentru ele are sens produsul $(AB)D$. Să observăm mai întîi că are sens şi produsul $A(BD)$: matricea BD conține n linii şi q coloane, deci este definit produsul $A(BD)$ şi el este o matrice de tip (m, q) – acelaşi tip ca şi al matricei $(AB)D$. Pentru a obține egalitatea elementelor respective, notăm: $U = AB = (u_{ij})$, $V = BD = (v_{ij})$, $S = (AB)D = (s_{ij})$, $T = A(BD) = (t_{ij})$.

Avem:
$u_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}, \ v_{kj} = \sum_{l=1}^{p} b_{kl} d_{lj}, \ s_{ij} = \sum_{l=1}^{p} u_{il} d_{lj} = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} d_{lj}, \ t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} d_{lj},$
adică $s_{ij} = t_{ij}$ pentru $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, q}$, şi, în final, $A(BD) = (AB)D$. Aici am aplicat proprietăţile operaţiilor cu numere complexe. ▶

Exerciţiu. Demonstraţi celelalte proprietăţi.

Toate operaţiile examinate anterior au sens în mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, de aceea pot fi calculate puteri cu exponent natural ale unei matrice. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, atunci $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$. Se verifică fără dificultate egalităţile $A^s \cdot A^t = A^{s+t}$, $(A^s)^t = A^{st}$, $s, t \in \mathbb{N}^*$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se calculeze $f(A) = A^3 - 2A^2 + 3I_2$, pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deci, $f(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Să se determine A^n, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

Vom aplica metoda inducţiei matematice.

Să intuim o formulă pentru A^n. Pentru aceasta, calculăm A^2, A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se poate presupune că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pentru $n = 1$ această formulă este evidentă.

2. Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}^*$, şi calculăm A^{k+1}. Folosind presupunerea, obţinem: $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. În baza metodei inducţiei matematice, formula $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

1.3. Transformări elementare ale matricelor. Matrice eşalon

Noţiunile ce urmează vor fi aplicate la rezolvarea sistemelor arbitrare de ecuaţii liniare.

Definiţie. Se spune că matricea nenulă A este o **matrice eşalon** (sau **matrice în trepte**) dacă primul (de la stînga) element nenul al fiecărei linii, începînd cu a doua, e situat mai la dreapta decît primul element nenul al liniei precedente.
Primele (de la stînga) elemente nenule ale fiecărei linii (dacă există) se numesc **lideri** ai matricei.

Exemple

1. Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ este matrice eşalon. Liderii ei sînt $a_{11} = 1,\ a_{23} = 3.$

2. Matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ nu este o matrice eşalon.

Observaţii. **1.** Dacă matricea eşalon are linii nule, atunci ele sînt ultimele în această matrice.
2. Orice matrice eşalon pătratică este o matrice superior triunghiulară.

Exerciţiu. Arătaţi că într-o matrice eşalon:
a) dacă a_{ij} este lider, atunci $i \le j$;
b) $a_{ij} = 0,$ oricare ar fi $i > j.$

Pentru a obţine dintr-o matrice dată o matrice eşalon, vom efectua asupra liniilor ei transformări asemănătoare cu cele pe care le efectuăm asupra ecuaţiilor unui sistem pentru a obţine un sistem echivalent.

Definiţie. Se numesc **transformări elementare asupra liniilor** unei matrice următoarele transformări:
1) permutarea a două linii;
2) înmulţirea elementelor unei linii cu un număr nenul;
3) adunarea la elementele unei linii a elementelor respective ale altei linii, înmulţite cu acelaşi număr.

Matricele A şi B de acelaşi tip se numesc ***matrice echivalente*** dacă una dintre ele se obţine din cealaltă prin efectuarea unui număr finit de transformări elementare asupra liniilor.

Se scrie: $A \sim B.$

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Efectuăm asupra liniilor ei următoarele transformări (indicate cu ajutorul săgeţilor):

a) permutăm liniile a doua şi a treia

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

b) înmulţim elementele liniei întîi cu i

$$\begin{array}{c} i \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -i & 0 & 2i \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

c) la elementele liniei întîi adunăm elementele respective ale liniei a treia înmulţite cu 2

$$\begin{array}{c} \\ \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

d) la elementele liniei întîi înmulţite cu 3 adunăm elementele liniei a treia înmulţite cu 2

$$\begin{array}{c} 3 \\ \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3. Pentru orice matrice nenulă A există cel puţin un şir finit de transformări elementare asupra liniilor care, efectuate consecutiv, reduc A la o matrice eşalon.

Exemplu

Vom reduce matricea A din exemplul precedent la o matrice eşalon, arătînd cu săgeţi transformările efectuate consecutiv:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

***Observaţii.* 1.** Există mai multe şiruri de transformări elementare asupra liniilor cu ajutorul cărora din matricea dată A se obţine o matrice eşalon.

2. Matricea eşalon la care poate fi redusă A nu este unică.

1.4. Matrice inversabile

Este bine cunoscut faptul că pentru orice număr complex nenul a există a^{-1}, astfel încît $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$ În intenţia de a găsi o matrice B pentru matricea A, astfel încît $A \cdot B = B \cdot A = I,$ se introduce următoarea noţiune:

Definiție. O matrice pătratică A se numeşte **inversabilă** dacă există o matrice pătratică B, astfel încît $AB = BA = I$.
Matricea B se numeşte **inversa** matricei A şi se notează A^{-1}.

Este clar că matricele B şi I sînt de acelaşi ordin ca şi A. Din relațiile $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ rezultă că A^{-1} de asemenea este inversabilă şi că inversa ei este A, adică $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exemple

Inversele matricelor $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sînt $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ şi respectiv $B^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, deoarece $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale matricelor inversabile

1° Inversa unei matrice inversabile este unică.

Demonstrație

Presupunem contrariul.

Fie B şi C două matrice inverse ale matricei A, adică $CA = AC = I$ şi $BA = AB = I$. Din aceste egalități obținem: $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. ▶

2° Dacă matricele $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sînt inversabile, atunci matricea $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k$ este inversabilă şi $(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot ... \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.

Demonstrație

Într-adevăr,

$$(A_1 \cdot ... \cdot A_k) \cdot (A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot ... \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}) = A_1(A_2 \cdot ... \cdot (A_{k-1} \cdot (A_k \cdot A_k^{-1})A_{k-1}^{-1}) \cdot ... \cdot A_2^{-1})A_1^{-1} =$$
$$= A_1(A_2 \cdot ... \cdot (A_{k-1} \cdot A_{k-1}^{-1}) \cdot ... \cdot A_2^{-1})A_1^{-1} = ... = A_1 A_1^{-1} = I_n.$$

În mod analog se obține $(A_k^{-1} \cdot ... \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot ... \cdot A_k) = I_n$.

Prin urmare, $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k$ este inversabilă şi

$(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot ... \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$. ▶

Transformările elementare ale liniilor matricei pot fi utilizate la calculul inversei unei matrice.

Pentru a determina inversa unei matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$, poate fi aplicat următorul *algoritm*:

- se formează matricea cu n linii şi $2n$ coloane $B = (A \mid I_n)$, scriind la dreapta de A matricea I_n – matricea unitate de ordinul n;
- se aplică asupra liniilor matricei B transformări elementare, astfel încît în locul matricei A să se obțină matricea I_n.

Matricea care se obține pe locul unde era scrisă I_n va fi matricea A^{-1}.

Observație. În cazul în care în locul matricei A se obține o matrice eşalon care are pe diagonala principală toate elementele nenule, atunci A este inversabilă. Dacă, efectuînd transformări elementare asupra matricei $B=(A\,\vert\,I_n)$, în locul matricei A se obține o matrice eşalon care are pe diagonala principală cel puțin un element egal cu zero, atunci matricea A nu este inversabilă.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine inversa matricei $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$(A\,\vert\,I_3)=\begin{array}{r}-3\\2\\ \\\end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\begin{array}{r} \\2\\-3\\\end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\begin{array}{r}22\\ \\ \\\end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & -6 & 4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\22\\-5\\\end{array}\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 44 & -22 & 0 & 16 & 4 & -3 \\ 0 & 66 & 0 & -36 & 24 & 15 \\ 0 & 0 & -22 & -6 & 4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l}3\\ \\ \\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 132 & 0 & 0 & 12 & 36 & 6 \\ 0 & 66 & 0 & -36 & 24 & 15 \\ 0 & 0 & -22 & -6 & 4 & -3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{132} & \frac{36}{132} & \frac{6}{132} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{36}{66} & \frac{24}{66} & \frac{15}{66} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{22} & -\frac{4}{22} & \frac{3}{22} \end{array}\right)=(I_3\,\vert\,A^{-1}).$$

Deci, $A^{-1}=\dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercițiu. Efectuați verificarea calculînd $A\cdot A^{-1}$ şi $A^{-1}\cdot A$.

2. Să se determine dacă este inversabilă matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$(A\,\vert\,I_3)=\begin{array}{r}-2\\ \\ \\\end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l}-3\\ \\ \\\end{array}\sim\begin{array}{r} \\-1\\ \\\end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Deoarece pe locul matricei A am obținut o matrice eşalon avînd pe diagonala principală un element egal cu zero, rezultă că A nu este inversabilă.

Exerciţii şi probleme propuse

A

1. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ -2 & i \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 2-i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3i \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 2+i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 3 \end{pmatrix}$; e) $3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & i \end{pmatrix}$; f) $2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ i & 0 & 7 \\ 2 & -i & 3 \end{pmatrix}$; g) $2i\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 2 & i-1 \\ 5 & i & -3 \end{pmatrix}$;

h) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 7i & 3 \\ -1 & 8i \end{pmatrix}-i\cdot\begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & -2 & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Să se determine numerele x, y, z, u, dacă $x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y & z & 6 \\ 1 & u & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Să se calculeze AB, BA (în caz dacă există produsul respectiv):

a) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

d) $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; f) $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Să se calculeze:

a) $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$; e) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^2$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^3$; g) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^4$.

Ce concluzie puteţi trage din rezultatele obţinute la a), b)?

5. Să se calculeze $A^2 - B^2$ (în caz dacă există), unde A, B sînt din exerciţiul **3**.

6. Să se afle matricea X, astfel încît $3X + A = 2B$, unde A, B sînt din exerciţiul **3**.

7. Să se reducă matricea la matrice eşalon:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 25 & 32 & 19 & 46 \end{pmatrix}$.

8. Cinci şantiere de construcţie C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 folosesc cărămidă produsă la fabrici amplasate în localităţile A, B, C. Preţurile (sute lei) pentru transportarea unei palete cu 1000 de cărămizi de la fiecare fabrică la fiecare şantier sînt indicate în următoarea matrice:

$$T=\begin{array}{c}\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ A \\ B \\ C\end{array}$$

Începînd cu luna viitoare, preţurile se vor majora cu 10%. Folosind operaţia de înmulţire a matricei cu un scalar, să se afle noile preţuri.

9. Numărul de palete cu cărămidă transportate de la fabrici la şantiere (a se vedea problema **8**) în primele trei luni ale anului sînt date respectiv de matricele M_1, M_2, M_3:

$$M_1=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 8 & 5 \\ 10 & 8 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ M_3=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicînd operaţii cu matrice, să se determine numărul total de palete cu cărămidă transportate de la fiecare fabrică la fiecare şantier în aceste trei luni.

B

10. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 2 \\ 3 & 0 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$;

d) $3\cdot\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 3 & -1 \\ 0 & \mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix}$; e) $\mathrm{i}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3\mathrm{i} & \mathrm{i} & 4+\mathrm{i} \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n,\ n\in\mathbb{N}^*$;

g*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n,\ n\in\mathbb{N}^*$; h) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k,\ k\in\mathbb{N}^*$; i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3,\ k\in\mathbb{N}^*$;

j) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 18 & 8 \\ -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Să se calculeze $f(A)$, dacă:

a) $f(X)=X^3-2X+I_3,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $f(X)=X^3-3X+2I_3,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12*. Să se arate că egalitatea $AB-BA=I$ este falsă, oricare ar fi matricele $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

13. O întreprindere preconizează să procure 3 tipuri de maşini T_1, T_2, T_3 de la 3 furnizori F_1, F_2, F_3. Numărul de maşini procurate de la fiecare furnizor este indicat în următoarea matrice:

$$M=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \end{array}.$$

În funcţie de varianta de completare a acestor maşini (două variante: V_1 şi V_2), întreprinderea le poate procura de la fiecare furnizor la următoarele preţuri (u.m.):

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5{,}1 & 4{,}1 \\ 5{,}2 & 4{,}0 \\ 5{,}0 & 3{,}8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \end{array}.$$

Să se determine suma care trebuie achitată fiecărui furnizor (în ambele variante).

14. Să se determine numărul de linii nenule ale matricei eşalon obţinute din matricea (în cazurile a), b), discuţie în funcţie de parametrul $\alpha \in \mathbb{R}$):

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & \alpha & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 8 & -2 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \end{pmatrix}$.

15. Să se determine dacă matricea este inversabilă şi, în caz afirmativ, să se calculeze inversa acesteia:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 0 & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 1 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$; l*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{n} & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

16. Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $AX = XA$, unde $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

17. Să se rezolve ecuaţia $X^2=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

§2 Determinanţi

Multe probleme pot fi rezolvate cu ajutorul sistemelor de ecuaţii liniare (adică ecuaţii de tipul $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$, $c, a_i \in \mathbf{C}$, $i = \overline{1, n}$). De exemplu, un elev a cumpărat 22 de caiete şi creioane, achitînd cumpărătura cu 20 lei. Cîte caiete şi cîte creioane au fost procurate, dacă un caiet costă 1,5 lei, iar un creion 0,5 lei? Notăm cu x numărul de caiete, cu y – numărul de creioane cumpărate. Din condiţia problemei obţinem sistemul de 2 ecuaţii liniare cu 2 necunoscute: $\begin{cases} x + y = 22, \\ 2{,}5x + 1{,}5y = 42. \end{cases}$ Aplicînd una dintre metodele cunoscute (metoda reducerii, metoda substituţiei), obţinem $x = 9$, $y = 13$.

În caz general, se examinează sisteme de ecuaţii liniare care conţin mai multe ecuaţii şi mai multe necunoscute, pentru rezolvarea cărora metodele menţionate sînt mai puţin eficiente. În cele ce urmează vom expune alte metode de rezolvare, axate pe noţiunea de matrice şi pe noţiunea de determinant al matricei.

Observaţie. În acest paragraf, termenul „matrice” va semnifica „matrice pătratică”.

2.1. Determinanţi de ordinul 2 (3). Sisteme de 2 (3) ecuaţii liniare cu 2 (3) necunoscute

Forma generală a unui sistem arbitrar de 2 ecuaţii liniare cu 2 necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbf{C}, \ i, j = \overline{1, 2}. \tag{1}$$

Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se numeşte ***matricea sistemului*** (1).

Considerînd că în fiecare ecuaţie cel puţin o necunoscută are coeficient nenul, rezolvăm sistemul aplicînd metoda reducerii. Obţinem:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases} \tag{2}$$

Evident, orice soluţie a sistemului (1) este soluţie şi pentru (2). Fie $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, atunci obţinem

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

Definiţie. Numărul $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numeşte **determinantul matricei** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sau **determinant de ordinul** 2.

Se mai notează: det A, $|A|$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Deci, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta.$

Expresia Δ se numeşte şi ***determinant principal al sistemului*** (1).

Se observă că numărătorii rapoartelor din (3) de asemenea sînt valori ale unor determinanți, şi anume: $b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\Delta_1,\ a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\Delta_2$, numiți ***determinanți secundari*** (sau ***auxiliari***) ***ai sistemului*** (1).

Menționăm că Δ_1 (sau Δ_2) este determinantul care se obține din $|A|$ prin substituirea coloanei 1 (respectiv coloanei 2) cu coloana $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ a termenilor liberi ai sistemului inițial.

Exemplu

Determinantul matricei $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ este numărul $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-4\cdot 1=2.$

Rezultatul obținut (3) stă la baza următoarei propoziții:


Gabriel Cramer

Teorema 4 (regula lui Cramer[1]). Dacă determinantul principal Δ al sistemului (1) este nenul, atunci sistemul are o soluție unică: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Demonstrație

Din transformările efectuate mai sus rezultă unicitatea soluției: dacă $x_1=c_1,\ x_2=c_2$ este o soluție a sistemului (1), atunci ea coincide cu valorile pentru $x_1,\ x_2$ calculate din (3). Faptul că expresiile (3) pentru $x_1,\ x_2$ sînt soluții se verifică prin substituirea lor în (1). ▶

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$, prin metoda (regula) lui Cramer, sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x_1-4x_2=3, \\ 3x_1+2x_2=1. \end{cases}$

Rezolvare:

Întrucît $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4+12=16\neq 0,$ putem aplica regula lui Cramer. Obținem:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=10;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-7.\ \text{Prin urmare, } x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{5}{8},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{7}{16}.$$

Răspuns: $S=\left\{\left(\frac{5}{8},-\frac{7}{16}\right)\right\}.$

Aplicînd metoda reducerii pentru a rezolva sistemul de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute, a cărui formă generală este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \quad a_{ij},\ b_i\in\mathbf{C},\ i,j=\overline{1,3}, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \qquad (4)$$

se pot obține ecuațiile $\Delta\cdot x_1=\Delta_1,\ \Delta\cdot x_2=\Delta_2,\ \Delta\cdot x_3=\Delta_3,$ (5)

[1] Gabriel Cramer (1704–1752) – matematician elvețian.

unde $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$,

$\Delta_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}$,

$\Delta_2 = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33}$,

$\Delta_3 = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3$.

Definiție. Se numeşte **determinant al matricei** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ sau **determinant de ordinul 3** numărul

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

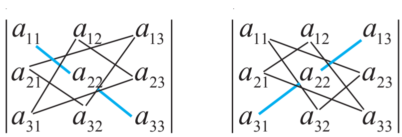
Se mai notează: $\det A$, $|A|$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-4) + 1\cdot3\cdot(-3) + 0\cdot4\cdot(-1) - (-1)\cdot(-2)\cdot(-3) - 2\cdot3\cdot4 - 1\cdot0\cdot(-4) = -11.$$

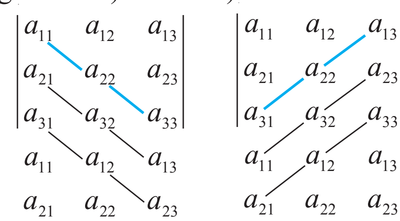
***Observații.* 1.** Determinantul matricei A de ordinul 3 este o sumă de şase termeni, fiecare fiind produsul a 3 elemente situate cîte unul în fiecare linie şi în fiecare coloană a matricei A (a determinantului).

2. Pentru memorizarea algoritmului de calcul al determinantului de ordinul 3, se poate utiliza ***regula triunghiurilor*** (fig. 7.1) sau ***regula lui Sarrus*** (fig. 7.2): se iau cu semnul plus produsele elementelor unite printr-o linie sau plasate în vîrfurile unui triunghi din figura 7.1 a) sau 7.2 a), iar cu semnul minus – produsele elementelor unite printr-o linie sau plasate în vîrfurile unui triunghi din figura 7.1 b) sau 7.2 b).



a) b)

Fig. 7.1



a) b)

Fig. 7.2

Revenim la rezolvarea sistemului (4). Expresia Δ se numeşte ***determinant principal*** al acestui sistem (determinantul matricei A a sistemului). Mai observăm că termenii liberi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ai ecuațiilor (5) sînt şi ei determinanți de ordinul trei (verificați!):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Menționăm că Δ_i $(i=\overline{1,3})$ (numit ***determinant auxiliar***) este determinantul matricei care se obține din matricea A a sistemului (4) prin substituirea coloanei i cu coloana termenilor liberi ai sistemului (4).

Aplicînd egalitățile (5), obținem următoarea teoremă, similară cu teorema 4.

Teorema 5 (regula lui Cramer). Dacă determinantul principal Δ al sistemului (4) este diferit de zero, atunci sistemul are o soluție unică:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Exercițiu rezolvat

Să se determine dacă poate fi aplicată regula lui Cramer şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}2x_1-\ x_2+x_3=\ 3,\\ \quad\quad 3x_2-x_3=-1,\\ 4x_1+\ x_2-x_3=\ 3.\end{cases}$$

Rezolvare:

Deoarece $\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&1\\0&3&-1\\4&1&-1\end{vmatrix}=-6+4-12+2=-12$ şi este nenul, rezultă că regula lui Cramer poate fi aplicată. Calculăm determinanții auxiliari:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&-1&1\\-1&3&-1\\3&1&-1\end{vmatrix}=-12;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2&3&1\\0&-1&-1\\4&3&-1\end{vmatrix}=0;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&3&-1\\4&1&3\end{vmatrix}=-12.$$

Obținem soluția: $x_1=\frac{-12}{-12}=1,\ x_2=\frac{0}{-12}=0,\ x_3=\frac{-12}{-12}=1.$

Răspuns: $S=\{(1,0,1)\}$.

Observație. Rezolvarea sistemelor de acest fel, în caz că determinantul principal este nul, se va examina în § 3.

2.2. Determinanți de ordinul *n*

Metoda lui Cramer de rezolvare a sistemelor de 2 (sau 3) ecuații liniare cu 2 (respectiv 3) necunoscute se va extinde pentru un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute $(n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$. Rezolvarea sistemului se axează pe noțiunea de determinant de ordinul n.

Inițial, pentru comoditate, vom considera determinantul de ordinul 1, $\mathbf{det}\,(a_{11})=a_{11}$, şi vom expune un alt algoritm de calcul al determinanților de ordinul 3, numit ***dezvoltarea determinantului după o linie/coloană***. În acest scop, grupăm termenii din definiția determinantului de ordinul 3, evidențiind elementele liniei întîi:

$|A|=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$

Acest rezultat poate fi scris sub forma:

$$|A|=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

Determinanții de ordinul doi din această expresie se numesc ***minori complementari*** ai elementelor respective a_{1j} din fața lor: ei reprezintă determinanții matricelor obținute din matricea inițială suprimînd linia 1 şi coloana j. Minorul complementar al elementului a_{ij} se notează cu $\overline{M}_j^i$. În aceste notații, pentru determinantul matricei A se obține expresia $|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\overline{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2}\overline{M}_2^1 + a_{13}(-1)^{1+3}\overline{M}_3^1$, care se numeşte ***dezvoltarea determinantului după linia întîi***. În mod analog se obține dezvoltarea aceluiaşi determinant de ordinul 3 după oricare linie sau coloană. De exemplu, se verifică uşor egalitatea:

$$|A| = a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{13}(-1)^4\overline{M}_3^1 + a_{23}(-1)^5\overline{M}_3^2 + a_{33}(-1)^6\overline{M}_3^3,$$

care reprezintă ***dezvoltarea determinantului după coloana a treia***.

În mod analog se obțin dezvoltările determinantului după oricare altă linie/coloană.

Exercițiu. Scrieți dezvoltările determinantului de ordinul 3 după alte linii, coloane.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, dezvoltîndu-l după o coloană.

Rezolvare:

Dezvoltăm determinantul după coloana întîi (elementul nul facilitează calculul):

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) + 0 + 4\cdot(-2) = -12.$$

Vom introduce noțiunea de determinant al matricei pătratice de ordinul n (pe scurt – determinant de ordinul n), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, inductiv, presupunînd cunoscute noțiunea de determinant de orice ordin mai mic sau egal cu $n-1$ şi noțiunea de minor complementar al elementului a_{ij} al matricei $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$. Acesta este determinantul matricei obținute din A prin suprimarea liniei i şi coloanei j; se notează cu $\overline{M}_j^i$.

Definiție. Se numeşte **determinant al matricei** $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $n \geq 2$, sau **determinant de ordinul n** numărul

$$\Delta = a_{11}(-1)^{1+1}\overline{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2}\overline{M}_2^1 + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}\overline{M}_n^1 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\overline{M}_j^1. \quad (6)$$

Se mai notează: $|A|$, $\det A$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Noțiunea ce urmează este extrem de utilă pentru calculul determinanților, precum şi pentru rezolvarea altor probleme.

Definiție. Se numește **complement algebric** al elementului a_{ij} al matricei $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\ n\geq 2,$ (al determinantului $|A|$) numărul $A_{ij}=(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i$.

De exemplu, minorul complementar al elementului a_{23} al determinantului $|A|$ din exercițiul precedent este $\overline{M}_3^2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=6,$ iar complementul algebric al acestuia este numărul $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot 6=-6.$

În acești termeni, definiția determinantului poate fi formulată astfel:

Determinantul matricei este egal cu suma produselor elementelor liniei întîi cu complemenții algebrici respectivi:

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \qquad (7)$$

Formulele (6) și (7) (pentru $n=3,$ ele coincid cu formula de dezvoltare a determinantului de ordinul 3 după prima linie, obținută anterior) sînt numite ***dezvoltare a determinantului după linia întîi***.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$+(-3)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot 0+(-1)\cdot(+15)+2\cdot 0+(-3)\cdot(-1)\cdot 0=-15.$$

Dacă în definiția determinantului am putea înlocui elementele primei linii cu cele ale altei linii (ca și pentru determinanții de ordinul 3), atunci am calcula determinantul precedent mai simplu: dezvoltîndu-l după linia a patra, vom avea nevoie doar de un minor complementar, deoarece ceilalți se vor înmulți cu 0. Teorema de mai jos stabilește că acest fapt este posibil.

Teorema 6. Fie $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\ n\geq 2.$ Pentru orice $i=\overline{1,n}$ are loc egalitatea

$$\Delta=|A|=a_{i1}(-1)^{i+1}\overline{M}_1^i+a_{i2}(-1)^{i+2}\overline{M}_2^i+\ldots+a_{in}(-1)^{i+n}\overline{M}_n^i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}. \qquad (8)$$

Formula (8) se numește ***formula dezvoltării determinantului după linia*** i.

Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

Aplicăm teorema 6 dezvoltînd determinantul după linia a patra (deoarece ea conţine cele mai multe elemente egale cu 0).

$$|A| = 0\cdot(-1)^{4+1}\overline{M}_1^4 + 0\cdot(-1)^{4+2}\overline{M}_2^4 + 3\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+4}\overline{M}_4^4 = (-3)\cdot 5 = -15.$$

Ideea de dezvoltare a determinantului după o linie care are mai multe elemente egale cu 0 generează o altă idee: posibilitatea dezvoltării determinantului după o coloană. Teorema ce urmează confirmă acest fapt.

Teorema 7. Fie $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\ n\ge 2.$ Oricare ar fi $j=\overline{1,n}$,

$$\Delta = |A| = a_{1j}(-1)^{1+j}\overline{M}_j^1 + a_{2j}(-1)^{2+j}\overline{M}_j^2 + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}\overline{M}_j^n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Această formulă se numeşte ***formula dezvoltării determinantului după coloana*** j.

Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze determinantul din exerciţiul precedent, dezvoltîndu-l după coloana a doua.

Rezolvare:

$$|A| = 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\overline{M}_2^2 + 0\cdot(-1)^{3+2}\overline{M}_2^3 + 0\cdot(-1)^{4+2}\overline{M}_2^4 = -1\cdot 15 = -15.$$

2.3. Proprietăţile determinanţilor

Pentru a calcula determinanţi de ordin mai mare decît 3 numai în baza definiţiei, se calculează, în caz general, un număr considerabil de determinanţi de ordinul 3: de exemplu, patru determinanţi pentru cel de ordinul 4, 20 de determinanţi pentru cel de ordinul 5. Din acest motiv (şi nu numai) vom demonstra unele proprietăţi ale determinanţilor de ordin arbitrar, care vor facilita calculul şi aplicarea lor.

1° Determinantul matricei A este egal cu determinantul matricei transpuse ${}^tA$.

Proprietatea poate fi demonstrată pentru $n=2,\ n=3$ calculînd $|A|$, $|{}^tA|$ sau utilizînd inducţia matematică pentru $n>3$ (determinantul $|A|$ se dezvoltă după linia întîi, iar $|{}^tA|$ – după coloana întîi).

Observație. Din această proprietate rezultă că orice propoziție adevărată pentru liniile unui determinant va fi adevărată şi pentru coloanele lui. Din acest motiv, proprietățile care urmează vor fi formulate doar pentru linii, însă ele sînt valabile şi pentru coloane.

2° Dacă matricea B se obține din matricea A permutînd două linii, atunci $|B| = -|A|$.

Demonstrație

Aplicăm metoda inducției matematice: pentru $k = 2$ proprietatea se verifică imediat, iar trecerea de la $k-1$ la k, $k \geq 3$, se efectuează dezvoltînd determinantul după o linie diferită de cele ce se permută. ▶

Exemplu

Permutînd liniile 2 şi 4 ale matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, obținem matricea

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Avem: $|A| = 3 \cdot (-1)^{4+3} \overline{M}_3^4 = -15$, $|B| = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$= -(-15) = 15$. Deci, $|B| = -|A|$.

3° Dacă o matrice A are două linii egale, atunci determinantul ei este egal cu zero.

Demonstrație

Într-adevăr, permutînd liniile egale, obținem o matrice B, astfel încît, în baza proprietății 2°, $|B| = -|A|$. De fapt, $B = A$, deoarece am permutat linii egale. Prin urmare, $|A| = |B| = -|A|$, adică $2|A| = 0$ şi deci $|A| = 0$. ▶

4° Suma produselor elementelor unei linii a matricei cu complemenții algebrici respectivi ai elementelor oricărei altei linii este egală cu zero:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k).$$

Demonstrație

Examinăm următorul determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{linia } k \\ \\ \leftarrow \text{linia } i \\ \\ \\ \end{matrix}$.

Expresia din membrul stîng al egalității reprezintă dezvoltarea după linia k a acestui determinant. Cum acest determinant conține două linii egale, el este egal cu 0. ▶

5° Dacă înmulțim toate elementele unei linii a unei matrice A cu un număr α, atunci determinantul matricei obținute A' este egal cu produsul dintre α şi determinantul matricei A.

Se mai spune: factorul comun al elementelor unei linii poate fi scos în fața determinantului.

Demonstrație

Elementele a'_{ij} ale liniei i a matricei A' au forma: $a'_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$. Dezvoltînd determinantul $|A'|$ după linia i, obținem: $|A'| = \sum_{j=1}^{n} (\alpha \cdot a_{ij}) \cdot A_{ij} = \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \alpha \cdot |A|$. ►

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16\mathrm{i} - 15\mathrm{i} = \mathrm{i}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1, \text{ deci } \begin{vmatrix} 2\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \mathrm{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

6° Dacă toate elementele unei linii a unei matrice sînt egale cu 0, atunci determinantul acestei matrice este egal cu 0.

Proprietatea rezultă imediat din proprietatea 5° pentru $\alpha = 0$.

Analog cu proprietatea 5° se demonstrează proprietatea 7°.

7° Dacă o matrice conține două linii proporționale, atunci determinantul ei este egal cu 0.

Liniile i și s ale unei matrice A se numesc ***linii proporționale***, dacă $a_{ij} = \beta \cdot a_{sj}$, $j = \overline{1, n}$.

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2 & \mathrm{i} & -3 \\ 4 & 2\mathrm{i} & -6 \\ 7 & \pi & \mathrm{i}\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0, \text{ fiindcă liniile 1 și 2 sînt proporționale.}$$

8° Dacă la elementele unei linii a matricei A adunăm elementele respective ale altei linii înmulțite cu unul și același număr nenul α, atunci se obține o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei A.

Demonstrație

Fie la elementele liniei k a matricei A se adună elementele respective ale liniei s înmulțite cu numărul α. Elementele liniei k a matricei obținute A' au forma: $a_{kj} + \alpha a_{sj}$. Dezvoltînd determinantul $|A'|$ după linia k, obținem

$$|A'| = \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} + \alpha \cdot a_{sj}) A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj} + \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{sj} A_{kj} = |A| + \alpha \cdot 0 = |A|. \quad ►$$

Exemplu

Dacă la elementele liniei a doua a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ adunăm elementele respective ale liniei a treia înmulțite cu –2, obținem matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Astfel, $|A| = |B| = 0$.

9° Fie elementele liniei i a matricei A au forma $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$, $j = \overline{1, n}$. Dacă A' (respectiv A'') este matricea care se obține din A înlocuind elementele liniei i cu elementele a'_{ij} (respectiv a''_{ij}), $j = \overline{1, n}$, atunci $|A| = |A'| + |A''|$.

Demonstrație

Dezvoltînd determinantul $|A|$ după linia i, obținem:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n}(a'_{ij} + a''_{ij})\cdot(-1)^{i+j}\overline{M}{}^{i}_{j} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(-1)^{i+j}\overline{M}{}^{i}_{j} + \sum_{j=1}^{n} a''_{ij}(-1)^{i+j}\overline{M}{}^{i}_{j} = |A'| + |A''|,$$

deoarece minorii complementari ai elementelor $a'_{ij} + a''_{ij}$, a'_{ij}, a''_{ij} ale matricelor A, A' şi respectiv A'' coincid. ►

2.4. Calculul determinanților

❶ Un procedeu de calcul al determinanților îl cunoaştem din definiția determinanților (prin dezvoltare după o linie [coloană]).

❷ Un al doilea procedeu de calcul constă în reducerea calculului determinantului de ordinul n la calculul unui singur determinant de ordinul $n-1$. Se aplică proprietățile determinanților, în special proprietatea 8°, pentru a obține o linie sau o coloană în care este cel mult un element nenul.

Pentru a evita calcule complicate, se recomandă, în prealabil, să se adune sau să se scadă unele linii (coloane) pentru a obține un element egal cu 1 sau –1 în linia (coloana) respectivă.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} 1-\mathrm{i} & 2 & 3\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 5 & -2+\mathrm{i} \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

Adunăm la linia întîi linia a doua: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4+\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 5 & -2+\mathrm{i} \end{vmatrix}$. Acum este simplu să obținem zero pe locul lui i: la linia a doua adunăm prima linie înmulțită cu –i.

Atunci: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4+\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 0 & 3-3\mathrm{i} & 3 \\ 0 & 5 & -2+\mathrm{i} \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3-3\mathrm{i} & 3 \\ 5 & -2+\mathrm{i} \end{vmatrix} = (3-3\mathrm{i})(-2+\mathrm{i}) - 15 = -18+9\mathrm{i}.$

❸ Un alt procedeu de calcul este reducerea determinantului la forma triunghiulară (toate elementele situate deasupra sau dedesubtul diagonalei principale sau secundare sînt nule).

La calculul determinanților de formă triunghiulară se vor aplica următoarele formule:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & 1_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & & \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n} a_{2\,n-1} \dots a_{n1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aceste rezultate se obțin dezvoltînd determinantul Δ_1 (respectiv Δ_2) şi ceilalți determinanți, care apar în continuare, după linia (coloana) care conține doar un element nenul.

De exemplu:

$$\Delta_1 = (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Exemple

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{13} a_{22} a_{31} \cdot (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}} = -a_{13} a_{22} a_{31}.$

2. Determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (matricea respectivă) nu are forma triunghiulară, însă, folosind proprietățile determinanților, el poate fi transformat (redus) la o atare formă:

$$\Delta = \begin{array}{r} \\ \\ \\ 3 \end{array}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ -4 \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -6 \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8(-1)^{\frac{4\cdot 3}{2}} \cdot (-1)(-3) = 24.$$

Pentru calculul unor determinanți de ordin arbitrar n este eficient de a reduce determinanții la forma triunghiulară.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze determinantul de ordinul n: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

Rezolvare:

Adunăm la prima linie toate celelalte linii, scoatem factorul $(n-1)$, apoi la fiecare din liniile 2, ..., n adunăm prima linie înmulțită cu –1:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}^{-1} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (n-1)\cdot(-1)^{n-1}.$$

Teorema 8 (determinantul produsului matricelor). Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, atunci $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

Exemplu

Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $|A| = 1$, $|B| = -2$, $|AB| = -2$.

2.5. Matrice inversabile (continuare)

Utilizînd determinanții, complemenții algebrici ai elementelor unei matrice pătratice, vom prezenta încă un criteriu de inversabilitate a matricei şi o altă metodă de calcul al inversei unei matrice (a se vedea secvența 1.4, § 1).

Teorema 9. Matricea pătratică este inversabilă dacă şi numai dacă determinantul ei este diferit de zero.

Demonstrație

Necesitatea rezultă din teorema 8. Într-adevăr, dacă matricea A este inversabilă, atunci $I = A\cdot A^{-1}$. Deci, $1 = |I| = |A|\cdot|A^{-1}|$, de unde rezultă că $|A| \neq 0$ şi (foarte important!) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.

Suficiența este de o mare importanță: demonstrația ei furnizează o formulă pentru calculul matricei inverse. Astfel, vom arăta că pentru $n \geq 2$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Într-adevăr, în baza proprietății 4° a determinanților, obținem:

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}A_{i1}a_{i1} & \sum\limits_{i=n}^{n}A_{i1}a_{i2} & \dots & \sum A_{i1}a_{in}\\ \sum\limits_{i=n}^{n}A_{i2}a_{i1} & \sum\limits_{i=n}^{n}A_{i2}a_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=n}^{n}A_{i2}a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}A_{in}a_{i1} & \sum\limits_{i=n}^{n}A_{in}a_{i2} & \dots & \sum\limits_{i=n}^{n}A_{in}a_{in}\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}|A| & 0 & \dots & 0\\ 0 & |A| & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & |A|\end{pmatrix}=\frac{|A|}{|A|}I=I.$$

În mod analog se arată că $A\cdot A^{-1}=I_n$.

Pentru $n=1$, din condiția $|A|=|a_{11}|\neq 0$ scriem $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_{11}}\end{pmatrix}$, deci $AA^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$. ▶

Exercițiu rezolvat

Să se determine inversa matricei $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Calculăm determinantul matricei: $|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}=6+4+12=22.$

Inversa există, întrucît determinantul matricei A este diferit de zero. Determinăm complemenții algebrici ai elementelor matricei A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=2;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-12;\ A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=6;\ A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}=8;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5;\ A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3.$$

Conform formulei (9), obținem: $A^{-1}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ -12 & 8 & 5\\ 6 & -4 & 3\end{pmatrix}$.

Aplicînd inversa unei matrice, pot fi rezolvate diverse ecuații matriciale. Dacă matricele A și B au același număr de linii, atunci ecuația $AX=B$, unde A este pătratică cu $\det A\neq 0$, poate fi rezolvată în modul următor: înmulțind-o la stînga cu A^{-1}, obținem, consecutiv, egalitățile matriciale: $A^{-1}(AX)=A^{-1}B,\ (A^{-1}A)X=A^{-1}B,\ I\cdot X=A^{-1}B,\ X=A^{-1}B.$

De exemplu, pentru matricea A din exercițiul precedent și $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avem

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ -12 & 8 & 5\\ 6 & -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}14 & -5\\ 4 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}.$$

Exercițiu. a) Arătați că soluția ecuației $XA = B$, $|A| \neq 0$, este matricea $X = B \cdot A^{-1}$.

b) Arătați că soluția ecuației $AXB = C$, $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $|A| \cdot |B| \neq 0$, este matricea $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Probleme rezolvate

1. Pentru producerea 1 t de bomboane „Masca” se folosesc 0,2 t de produse de cacao şi 0,5 t de zahăr, iar pentru producerea 1 t de bomboane „Griliaj” se folosesc 0,14 t de produse de cacao şi 0,6 t de zahăr (în afară de alte componente). Să se afle cantitatea de bomboane produse de fiecare fel, dacă s-au folosit 0,15 t de produse de cacao şi 0,5 t de zahăr.

Rezolvare:

Fie x_1 şi x_2 cantitatea (în tone) de bomboane produse „Masca” şi respectiv „Griliaj”.

Alcătuim sistemul de ecuații: $\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}14x_2 = 0{,}15 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 = 0{,}5 \end{cases}$ sau, în formă matricială, $AX = B$,

unde $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}14 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$. Calculăm: $A^{-1} = \dfrac{1}{0{,}05}\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}14 \\ -0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Înmulțind egalitatea $AX = B$ la stînga cu A^{-1}, obținem:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{0{,}05}\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}14 \\ -0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}05}\begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Astfel, au fost produse 0,4 t de bomboane „Masca” şi 0,5 t de bomboane „Griliaj”.

2. Se poate demonstra că aria triunghiului $M_1M_2M_3$, unde $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, se calculează conform formulei: $\mathcal{A}_{M_1M_2M_3} = \left| \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$. În particular, punctele M_1, M_2, M_3 vor fi coliniare, dacă determinantul respectiv este nul.

Fie punctele $M_1(2, 3)$, $M_2(3, 0)$, $M_3(2, 2)$. Să se calculeze aria triunghiului $M_1M_2M_3$ sau să se arate că punctele respective sînt coliniare.

Rezolvare:

Determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ este egal cu -1, deci punctele în cauză nu sînt coliniare. Aria $\Delta M_1M_2M_3$ este $\dfrac{1}{2} \cdot |-1| = \dfrac{1}{2}$ (unități pătrate).

Exerciţii propuse

A

1. Să se calculeze determinantul:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5\mathrm{i} & 2 \\ \mathrm{i} & -3 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 2-\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 3 & 5-\mathrm{i} \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; j) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul aplicînd (dacă este posibil) regula lui Cramer:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 = 1, \\ 7x_1 + 11x_2 = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_2 = 2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 6; \end{cases}$

e) $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c, \\ -bx_1 + ax_2 = d, \end{cases}$ $a\cdot b \neq 0,\ a \neq b;$ f) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$ j) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

B

3. Să se calculeze determinantul:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Aplicînd proprietăţile determinanţilor, să se demonstreze egalitatea:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

5. Dacă vom schimba semnele tuturor elementelor determinantului, cum se va modifica valoarea determinantului de ordinul: a) 3; b) n?

6. Cum se va schimba valoarea determinantului matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dacă fiecare element va fi înlocuit cu conjugatul său?

7. Cum se va schimba valoarea determinantului de ordinul n dacă fiecare element se va înmulţi cu acelaşi număr nenul α?

8. Să se arate că determinantul $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & c_1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & c_2 \\ z_3 & \overline{z}_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbf{C}$, este un număr pur imaginar sau 0.

9. Să se rezolve în $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}(3-\mathrm{i})x+(4+2\mathrm{i})y=2+6\mathrm{i},\\(4+2\mathrm{i})x-(2+3\mathrm{i})y=5+4\mathrm{i};\end{cases}$ b) $\begin{cases}(2+\mathrm{i})x+(2-\mathrm{i})y=6,\\(3+2\mathrm{i})x+(3-2\mathrm{i})y=8;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+\mathrm{i}y-2z=10,\\x-y+2\mathrm{i}z=20,\\\mathrm{i}x+3\mathrm{i}y-(1+\mathrm{i})z=30.\end{cases}$

10. Să se calculeze aria triunghiului $M_1M_2M_3$ sau să se arate că punctele M_1, M_2, M_3 sînt coliniare.

a) $M_1(2, 1)$, $M_2(3, 4)$, $M_3(1, 6)$; b) $M_1(0, 0)$, $M_2(2, 1)$, $M_3(4, 2)$;

c) $M_1(-2, 4)$, $M_2(0, -3)$, $M_3(1, 7)$; d) $M_1(5, 4)$, $M_2(11, 0)$, $M_3(0, 3)$.

11. Utilizînd proprietățile determinanților, să se calculeze:

a) $\begin{vmatrix}a & 1 & a^2\\ b & 1 & b^2\\ c & 1 & c^2\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}x & a & a\\ a & x & a\\ a & a & x\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}a^2 & b^2 & c^2\\ c & b & a\\ b & c & a\end{vmatrix}$.

12. Utilizînd complemenții algebrici ai elementelor, să se calculeze inversa matricei:

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}$.

13. Să se rezolve ecuațiile matriciale $AX=B$, $YA=B$, unde A este din **12** a) şi B este din **12** b).

14. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\begin{vmatrix}x-2 & 1 & -1\\ x & -3 & 1\\ 2 & -5 & x+1\end{vmatrix}=0$; b) $\begin{vmatrix}a-x & a & a\\ a & a-x & a\\ a & a & a-x\end{vmatrix}=0$.

15. Să se calculeze determinantul şi să se scrie rezultatul sub formă de produs:

a) $\begin{vmatrix}a^2 & b^2 & c^2\\ bc & ac & ab\\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ bc & ca & ab\end{vmatrix}$.

§3 Sisteme de ecuații liniare

3.1. Noțiuni generale

În acest paragraf vom determina condițiile în care un sistem arbitrar de ecuații liniare are soluții şi vom expune unele metode de determinare a mulțimii soluțiilor acestuia.

Forma generală a unui sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad a_{ij},\ b_i \in \mathbf{C},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}. \qquad (1)$$

Numerele $a_{ij},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$ se numesc ***coeficienți ai necunoscutelor***, iar $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – ***termeni liberi*** ai sistemului. Din coeficienții necunoscutelor şi din termenii liberi formăm două matrice: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$

numite, respectiv, ***matricea sistemului*** şi ***matricea extinsă*** a sistemului.

Definiție. Sistemul ordonat de n numere complexe $(c_1, \ldots, c_n)$ se numeşte **soluție** a sistemului (1) dacă, înlocuind necunoscutele x_i, respectiv, cu c_i, $i = \overline{1, n}$, fiecare ecuație din (1) se transformă într-o propoziție adevărată, adică

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_j = b_i,\ \ i = \overline{1, m}.$$

Observație. Pentru comoditate, vom prezenta soluția unui sistem de ecuații cu n necunoscute (fiind stabilită ordinea $x_1, \ldots, x_n$) şi ca o matrice-coloană $X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, considerînd că se substituie $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$.

Se poate arăta că dacă un sistem de ecuații liniare are cel puțin două soluții, atunci mulțimea soluțiilor lui este infinită.

Un sistem de ecuații liniare se numeşte ***compatibil*** dacă el are cel puțin o soluție. Sistemul care are o soluție unică se numeşte ***compatibil determinat***, iar cel care are mai mult decît o soluție – ***compatibil nedeterminat***. Un sistem de ecuații care nu are soluții se numeşte ***incompatibil***.

Exemple

Fie sistemele de ecuații liniare $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 4x_1 - 8x_2 = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$

Primul sistem este compatibil determinat, fiindcă determinantul matricei sistemului este nenul şi prin metoda lui Cramer stabilim că el are o soluție unică. Al doilea sistem este compatibil nedeterminat: soluții ale sistemului sînt, de exemplu, $x_1 = 1,\ \ x_2 = -1;$ $x_1 = -3,\ \ x_2 = -3$. Ultimul sistem este incompatibil, fiindcă membrii din stînga ai ecuațiilor sînt aceeaşi, iar cei din dreapta diferă.

A rezolva un sistem de ecuații liniare înseamnă:
a) a stabili dacă el este compatibil;
b) în caz afirmativ, a determina mulțimea soluțiilor sale.

În caz general, vom considera că rezolvăm sistemul de ecuații în mulțimea numerelor complexe.

Scrierea matricială a sistemului (1) este:

$$AX = B, \tag{2}$$

unde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{C})$.

Fie încă un sistem de ecuații liniare:

$$A_1 X = B_1, \tag{3}$$

unde matricele A_1, B_1 sînt de același tip ca și matricele A, B, respectiv.

Definiție. Sistemele (2) și (3) se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sînt egale (în particular, dacă ambele nu au soluții).

Exemplu

Sistemele $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ și $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ au soluție comună $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$, însă totuși nu sînt echivalente, fiindcă $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$ este soluție a sistemului al doilea, dar nu este soluție pentru primul sistem.

Lemă. Dacă $A, A_1 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $B, B_1 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{C})$ și există o matrice inversabilă $U \in \mathcal{M}_m(\mathbf{C})$, astfel încît $UA = A_1$, $UB = B_1$, atunci sistemele (2) și (3) sînt echivalente.

Demonstrație

Fie sistemul (2) compatibil, $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ o soluție arbitrară pentru (2), adică este adevărată egalitatea $AX_0 = B$. Înmulțind la stînga această egalitate cu U, obținem $UAX_0 = UB$, sau $A_1X_0 = B_1$. Deducem că orice soluție a sistemului (2) este soluție și pentru sistemul (3). Analog se obține că orice soluție a sistemului (3) este soluție și pentru (2), deoarece $A = U^{-1}A_1$, $B = U^{-1}B_1$. Deci, sistemele (2) și (3) sînt echivalente. ►

3.2. Metode de rezolvare a sistemelor de *n* ecuații liniare cu *n* necunoscute

❑ *Metoda matricială*

Considerînd în sistemul (1) $m = n$, se obține următorul sistem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

Scrierea matricială a acestui sistem este

$$AX = B, \tag{5}$$

unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ este matricea pătratică a sistemului, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$.

Teorema 10. Dacă matricea A a sistemului (4) este inversabilă, atunci sistemul are o soluție unică:

$$X_0 = A^{-1}B. \tag{6}$$

Demonstrație

Înmulțind la stînga egalitatea (5) cu A^{-1}, obținem consecutiv: $A^{-1}(AX) = A^{-1} \cdot B$, $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $X = A^{-1} \cdot B$. În baza lemei din secvența 3.1, sistemele (5) și $X = A^{-1} \cdot B$ sînt echivalente: în calitate de U din lemă s-a luat matricea inversabilă A^{-1}. ▶

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ sistemul de ecuații: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

Rezolvare:

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Formăm matricea $(A \,\vdots\, I)$ și efectuăm transformări elementare asupra liniilor ei pentru a obține pe locul matricei A matricea I (dacă este posibil):

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Elementele de pe diagonala principală a matricei eșalon obținute din A sînt nenule, deci (în baza condiției de inversabilitate a matricei (§ 1, secvența 1.4)) A este inversabilă. Continuăm să efectuăm transformări pînă obținem zerouri deasupra diagonalei principale:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right). \text{ Așadar, } A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conform (6), soluția este $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, adică $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Răspuns: $S = \{(1, 0, 1)\}$.

❑ ***Regula lui Cramer*** (demonstrată în § 2 pentru $n = 2$, $n = 3$) este o altă metodă de rezolvare a sistemelor de n ecuații liniare cu n necunoscute, $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicînd proprietatea 4° (secvența 2.3), formula (7) (secvența 2.2) și formula (9) (secvența 2.5) pentru A^{-1}, din (6) obținem formulele pentru calculul valorilor necunoscutelor $x_1, x_2, ..., x_n$.

Astfel, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \dfrac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_{i1} b_i \\ \sum_{i=1}^{n} A_{i2} b_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} A_{in} b_i \end{pmatrix}$, de unde:

$$x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} A_{ij} b_i = \frac{1}{|A|} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n},$$

Δ_j fiind determinantul matricei care se obține din A prin substituirea coloanei j cu coloana termenilor liberi ai sistemului (4). Determinantul $\Delta = |A|$ se numeşte ***determinant principal***, iar $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ – ***determinanți secundari ai sistemului*** (4). Rezultatul obținut este

Teorema 11 (regula lui Cramer). Dacă determinantul Δ al matricei sistemului de ecuații liniare (4) este diferit de zero, atunci sistemul este compatibil determinat şi soluția sa este:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Exemplu

Aplicînd teorema 11 sistemului de ecuații din exercițiul precedent, obținem $\Delta = -3$, $\Delta_1 = -3$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = -3$. Deci, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

3.3. Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

Spre deosebire de metodele examinate, ***metoda lui Gauss*** (numită şi ***metoda eliminărilor succesive***), expusă în continuare, poate fi aplicată la rezolvarea oricărui tip de sisteme de ecuații liniare (1). Asupra sistemelor vom efectua următoarele transformări ce permit să se obțină sisteme echivalente cu cel inițial (echivalența se verifică nemijlocit):

- permutarea a două ecuații;
- înmulțirea ambilor membri ai unei ecuații cu un număr nenul;
- adunarea la fiecare membru al unei ecuații a membrilor respectivi ai altei ecuații, înmulțiți cu unul şi acelaşi număr.

Este clar că efectuarea acestor transformări asupra ecuațiilor unui sistem este echivalentă cu efectuarea transformărilor elementare respective asupra liniilor matricei extinse $\overline{A}$ a sistemului (a se vedea secvența 1.3).

Exemplele ce urmează vor facilita înțelegerea metodei lui Gauss şi reprezintă două tipuri de sisteme care pot fi obținute ca rezultat al aplicării acestei metode.

1. Să se rezolve în **C** sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ \quad\;\; x_2 - x_3 = -1, \\ \qquad\quad 2x_3 = 1. \end{cases}$

Observăm că matricea sistemului este superior triunghiulară, avînd toate elementele de pe diagonala principală nenule. Se spune că un atare sistem este ***triunghiular***.

Sistemele de acest tip se rezolvă relativ simplu: din ultima ecuaţie calculăm valoarea ultimei necunoscute şi o substituim în toate celelalte ecuaţii; din penultima ecuaţie calculăm valoarea penultimei necunoscute ş.a.m.d., pînă calculăm valoarea primei necunoscute din prima ecuaţie. Prin urmare, sistemul va avea o unică soluţie.

În exemplul dat, din ultima ecuaţie obţinem $x_3 = \frac{1}{2}$; substituim valoarea lui x_3 în primele două ecuaţii şi din ecuaţia a doua obţinem $x_2 = -\frac{1}{2}$; în final, substituind valoarea lui x_2 în prima ecuaţie, obţinem $x_1 = 1$. Unica soluţie a sistemului este: $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{2}$.

Răspuns: $S = \left\{\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2. Să se rezolve în **C** sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

Observăm că sistemul nu conţine o ecuaţie de forma $0 = b,\ b \neq 0$, numărul necunoscutelor lui este mai mare decît numărul ecuaţiilor şi matricea sistemului are forma eşalon. Se spune că un atare sistem este ***trapezic*** (altfel zis, un sistem de ecuaţii liniare este un sistem trapezic dacă matricea lui are forma eşalon, numărul r de linii nenule ale matricei sistemului este egal cu numărul de linii nenule ale matricei extinse a sistemului şi r este mai mic decît numărul de necunoscute ale sistemului). Necunoscutele ai căror coeficienţi sînt liderii matricei sistemului trapezic se consideră, de regulă, ***necunoscute principale***, iar celelalte – ***necunoscute secundare***.

În exemplul dat, considerăm x_1 şi x_2 necunoscute principale, iar x_3 – necunoscută secundară.

Sistemul trapezic (iniţial) se reduce la un sistem triunghiular în necunoscutele principale $x_1,\ x_2$ în următorul mod:

Lăsăm în membrul stîng al fiecărei ecuaţii toţi termenii ce conţin necunoscutele principale, iar ceilalţi termeni îi trecem în membrul drept, schimbîndu-le semnul:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 = 1 - x_3, \\ \qquad 3x_2 = 1 + x_3. \end{cases}$$

Notînd necunoscuta secundară x_3 cu $\alpha,\ \alpha \in \mathbf{C}$, şi rezolvînd sistemul, obţinem aşa-numita *soluţie generală* a sistemului: $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\alpha,\ x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha,\ x_3 = \alpha,\ \alpha \in \mathbf{C}$. Este clar că pentru fiecare valoare atribuită parametrului α se determină în mod unic valorile necunoscutelor principale. De exemplu, pentru $\alpha = 0$ obţinem o soluţie a sistemului $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = 0$, numită *soluţie particulară*.

Pentru $\alpha = -1$ se obţine $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$ – o altă soluţie particulară a sistemului.

Parametrului α, deci şi necunoscutei secundare x_3, îi putem atribui o infinitate de valori din **C**. Din acest motiv, sistemul este compatibil nedeterminat.

Observaţii. **1.** Lista necunoscutelor principale se determină neunivoc: e important doar să se obţină un sistem triunghiular în raport cu necunoscutele principale.
De exemplu, în sistemul precedent pot fi numite necunoscute principale x_1, x_3.

2. Sistemele triunghiulare şi sistemele trapezice sînt compatibile: sistemul triunghiular are soluţie unică, iar sistemul trapezic are o mulţime infinită de soluţii.

Compatibilitatea sistemelor de ecuații liniare este determinată de

Teorema 12. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{C})$ și $\overline{A} = (A \mid B)$. Sistemul de ecuații liniare $AX = B$ este compatibil dacă și numai dacă matricele eșalon A_1, $\overline{A_1}$ obținute din A și respectiv $\overline{A}$ au același număr de linii nenule.

Demonstrație

Necesitatea. Considerînd că sistemul $AX = B$ este compatibil, îl vom reduce la un sistem trapezic, echivalent cu cel inițial.

Fie $\overline{A_1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1p} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ \hdashline 0 & \dots & a'_{rp} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$ matricea eșalon obținută din matricea extinsă $\overline{A}$ a sistemului cu ajutorul transformărilor elementare ale liniilor, $a'_{rp} \neq 0$.

Deoarece sistemul $AX = B$ este compatibil, rezultă că este compatibil și sistemul a cărui matrice extinsă este $\overline{A_1}$. Prin urmare, $b_i = 0$, pentru orice $i = \overline{r+1, m}$, adică numărul de linii nenule ale matricei A_1 este egal cu numărul de linii nenule ale matricei $\overline{A_1}$.

Suficiența. Dacă numărul r de linii nenule ale matricei A_1 este egal cu numărul de linii nenule ale matricei $\overline{A_1}$, atunci $\overline{A_1}$ are forma $\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1p} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ \hdashline 0 & \dots & a'_{rp} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a'_{rp} \neq 0$.

Sistemul care are matricea extinsă $\overline{A_1}$ este echivalent cu sistemul $AX = B$ și este un sistem triunghiular (în cazul $r = n$) sau un sistem trapezic (în cazul $r < n$), de aceea este compatibil. ►

Exerciții rezolvate

1. Să se determine compatibilitatea sistemului $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

Rezolvare:

Formăm matricea extinsă $\overline{A}$ a sistemului și o reducem la forma eșalon:

$$\left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr:r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Matricea eșalon $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ obținută din matricea sistemului, precum și matricea $\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ obținută din matricea extinsă au cîte 2 linii nenule.

Prin urmare, sistemul inițial este compatibil.

2. Dacă în exemplul precedent termenul liber al ecuației a treia ar fi, de exemplu, 5, atunci ultima matrice ar fi: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$. Astfel, matricele eşalon obținute din matricea sistemului şi din cea extinsă conțin 2 şi respectiv 3 linii nenule, deci sistemul este incompatibil.

Ideea reducerii matricei extinse a sistemului la forma eşalon, folosită în demonstrația teoremei 12, constituie baza ***metodei lui Gauss*** de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. De reținut că această metodă are avantajul de a fi uşor programabilă pe calculator. Ea constă în următoarele:

1. Scriem matricea extinsă $\overline{A} = (A \mid B)$ a sistemului (1).
2. Prin transformări elementare ale liniilor, reducem această matrice la o matrice eşalon $\overline{A_1} = (A_1 \mid B_1)$, unde A_1 este matricea eşalon obținută din A.
3. Dacă numărul de linii nenule ale matricei A_1 nu este egal cu numărul de linii nenule ale matricei $\overline{A_1}$, atunci sistemul este incompatibil.
4. Dacă numărul de linii nenule ale matricei A_1 este r şi este egal cu numărul de linii nenule ale matricei $\overline{A_1}$, atunci sistemul este compatibil.
   Distingem două cazuri posibile.
   4.1. Numărul r menționat în punctul 4 este egal cu numărul necunoscutelor. În atare caz, matricea eşalon A_1 este superior triunghiulară, toate elementele de pe diagonala principală sînt nenule. Scriem sistemul căruia îi corespunde matricea extinsă $\overline{A_1}$; evident, el este triunghiular şi, prin urmare, are o soluție unică.
   4.2. Numărul menționat r este mai mic decît numărul n al necunoscutelor. În acest caz, matricea eşalon A_1 conține mai multe coloane decît linii nenule. Scriem sistemul căruia îi corespunde matricea extinsă $\overline{A_1}$ (acest sistem este trapezic şi este echivalent cu sistemul (1)). În continuare, specificăm necunoscutele principale (numărul lor este r), apoi necunoscutele secundare, pe care le notăm $x_p = \alpha,\ x_q = \beta, \ldots,$ unde $\alpha, \beta, \ldots$ sînt parametri cu valori din **C**. Lăsăm în membrul stîng al fiecărei ecuații toți termenii ce conțin necunoscutele principale, iar ceilalți termeni îi trecem în membrul drept, schimbîndu-le semnul. Deoarece $r < n$, în membrii din dreapta se va conține cel puțin un parametru. După aceste transformări se obține un sistem triunghiular de r ecuații cu r necunoscute (cele principale). Pentru fiecare set de valori atribuite parametrilor, într-un mod unic se determină valorile necunoscutelor principale. Şirul obținut de valori pentru $x_1, \ldots, x_n$ va constitui ***o soluție particulară*** a sistemului. În acest mod se obține o infinitate de soluții, deoarece parametrilor le putem atribui o infinitate de valori.

Observație. Pentru a descrie mulțimea infinită de soluții care se obțin în cazul 4.2, vom proceda astfel. Din sistemul redus $A_1X=B_1$ exprimăm necunoscutele principale $x_k, x_l, \ldots$ prin parametrii $\alpha, \beta, \ldots$ Sistemul de relații obținut:

$$\begin{cases} x_k = f_k(\alpha, \beta, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_l = f_l(\alpha, \beta, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p = \alpha \\ x_q = \beta \\ \ldots\ldots \end{cases} \tag{7}$$

se numește ***soluție generală*** a sistemului (1) și descrie mulțimea tuturor soluțiilor acestui sistem, în sens că orice soluție a acestuia se obține din (7) pentru unele valori ale parametrilor.

Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve în $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=2, \\ 2x_1+x_2+5x_3=10, \\ x_1-x_2+7x_3=8. \end{cases}$

Dacă el este compatibil nedeterminat, să se determine și o soluție particulară.

Rezolvare:

Formăm matricea extinsă $\overline{A}$ a sistemului și o reducem la o matrice eșalon:

$$\begin{array}{c} -1 \ \ -2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim -1\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \end{array}\right)\frac{1}{3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Constatăm că numărul liniilor nenule ale matricei eșalon A_1 la care s-a redus matricea sistemului este $r=2$ și este egal cu numărul liniilor nenule ale matricei eșalon $\overline{A_1}$ la care s-a redus matricea extinsă, deci sistemul este compatibil. Întrucît acest număr este mai mic decît numărul necunoscutelor, rezultă că sistemul are o infinitate de soluții. Pentru a determina soluția generală, scriem sistemul corespunzător matricei eșalon $\overline{A_1}$:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=2, \\ \qquad -x_2+3x_3=2. \end{cases}$$

Necunoscute principale pot fi alese x_1 și x_2, atunci necunoscută secundară va fi x_3. Notînd necunoscuta secundară cu α, $\alpha\in\mathbf{C}$, obținem sistemul:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=2+2\alpha, \\ \qquad -x_2=2-3\alpha. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem în necunoscutele x_1, x_2, aflăm soluția generală:
$x_1=6-4\alpha,\ x_2=-2+3\alpha,\ x_3=\alpha.$

Dacă atribuim lui α, de exemplu, valoarea 0, obținem o soluție particulară a sistemului:
$x_1=6,\ x_2=-2,\ x_3=0.$

Răspuns: $S=\{(6-4\alpha,\ -2+3\alpha,\ \alpha)\mid \alpha\in\mathbf{C}\}$;
soluție particulară: $x_1=6,\ x_2=-2,\ x_3=0.$

2. Să se rezolve în $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x_1+\alpha x_2-x_3=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3=\alpha \\ x_1+x_2=0, \end{cases}$ analizînd toate cazurile posibile (în funcție de valorile parametrului $\alpha\in\mathbf{C}$).

Rezolvare:

Formăm matricea extinsă a sistemului şi o reducem la o matrice eşalon:

$$\begin{array}{c} \\ \\ -1\ \ -2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \alpha & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha \\ 0 & -1+\alpha & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ 1-\alpha \\ -3 \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 6-3\alpha & -3+\alpha-\alpha^2 \end{array}\right).$$

1) Dacă $6-3\alpha\neq 0$, adică $\alpha\neq 2$, atunci sistemul este triunghiular, deci este compatibil determinat, cu soluția unică: $x_1=\dfrac{3+\alpha}{6-3\alpha}$, $x_2=\dfrac{3+\alpha}{-6+3\alpha}$, $x_3=\dfrac{\alpha^2-\alpha+3}{-6+3\alpha}$.

2) Dacă $6-3\alpha=0$, adică $\alpha=2$, atunci sistemul obținut $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3=2 \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$ este incompatibil, deoarece matricea eşalon A_1 obținută din matricea sistemului are 2 linii nenule, iar cea obținută din matricea extinsă – 3 linii nenule: $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$.

3. Să se rezolve în $\mathbf{C}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x_1+2\mathrm{i}x_2-x_3+(1+\mathrm{i})x_4=3+2\mathrm{i}, \\ 2x_1+x_2+(-2+\mathrm{i})x_3+2\mathrm{i}x_4=4+5\mathrm{i}, \\ x_1+2\mathrm{i}x_2+(-1+\mathrm{i})x_3+(2+\mathrm{i})x_4=3. \end{cases}$

Rezolvare:

Scriem matricea extinsă a sistemului şi o reducem la forma eşalon:

$$\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2\mathrm{i} & -1 & 1+\mathrm{i} & 3+2\mathrm{i} \\ 2 & 1 & -2+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 4+5\mathrm{i} \\ 1 & 2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 3 \end{array}\right)\begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2\mathrm{i} & -1 & 1+\mathrm{i} & 3+2\mathrm{i} \\ 0 & 1-4\mathrm{i} & \mathrm{i} & -2 & -2+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 & -2\mathrm{i} \end{array}\right).$$

Obținem sistemul trapezic respectiv: $\begin{cases} x_1+2\mathrm{i}x_2-x_3+(1+\mathrm{i})x_4=3+2\mathrm{i}, \\ (1-4\mathrm{i})x_2+\mathrm{i}x_3-2x_4=-2+\mathrm{i}, \\ \mathrm{i}x_3+x_4=-2\mathrm{i}. \end{cases}$

Declarăm necunoscute principale x_1, x_2, x_4, iar x_3 – necunoscută secundară şi rezolvăm sistemul $\begin{cases} x_1+2\mathrm{i}x_2+(1+\mathrm{i})x_4=3+2\mathrm{i}+x_3 \\ (1-4\mathrm{i})x_2-2x_4=-2+\mathrm{i}-\mathrm{i}x_3 \\ x_4=-2\mathrm{i}-\mathrm{i}x_3 \end{cases}$ în necunoscutele x_1, x_2, x_4.

Notînd $x_3=\alpha$, obținem soluția generală $x_1=\dfrac{1}{17}(-5+48\mathrm{i}-(6+7\mathrm{i})\alpha)$, $x_2=\dfrac{1}{17}(10-11\mathrm{i}+(12-3\mathrm{i})\alpha)$, $x_3=\alpha$, $x_4=-2\mathrm{i}-\mathrm{i}\alpha$.

Răspuns: $S=\left\{\left(\dfrac{1}{17}(-5+48\mathrm{i}-(6+7\mathrm{i})\alpha),\ \dfrac{1}{17}(10-11\mathrm{i}+(12-3\mathrm{i})\alpha),\ \alpha,\ -2\mathrm{i}-\alpha\mathrm{i}\right)\middle|\ \alpha\in\mathbf{C}\right\}$.

Observație. Soluția generală nu este univoc determinată, deoarece ea depinde de șirul de transformări elementare aplicate pentru a obține un sistem trapezic din cel dat, de necunoscutele principale selectate. Însă în toate soluțiile generale, în expresiile din membrii din dreapta, figurează același număr de necunoscute secundare $(n-r)$, n fiind numărul necunoscutelor şi r – numărul de linii nenule ale matricei eşalon.

De exemplu, dacă în exercițiul **1** numim x_1, x_3 necunoscute principale, atunci, notînd $x_2=\alpha$, avem sistemul $\begin{cases}x_1-2x_3=2-2\alpha\\ \phantom{x_1-{}}3x_3=2+\alpha,\end{cases}$ de unde obținem soluția generală $x_1=\frac{1}{3}(10-4\alpha),\ x_2=\alpha,\ x_3=\frac{1}{3}(2+\alpha),\ \alpha\in\mathbf{C}.$

3.4. Sisteme de ecuații liniare omogene

Sistemul de ecuații liniare (1) se numeşte ***omogen*** dacă termenii liberi ai tuturor ecuațiilor sînt 0. Forma generală a unui sistem de m ecuații liniare omogene cu n necunoscute este:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}\tag{8}$$

Observație. Matricea extinsă a sistemului omogen se deosebeşte de matricea sistemului printr-o coloană nulă (ultima), de aceea numărul de linii nenule ale matricelor eşalon obținute din ele este acelaşi.

Aplicînd rezultatele obținute anterior, obținem fără dificultate următoarele *propoziții*:

1. Orice sistem omogen de ecuații liniare este compatibil, avînd cel puțin soluția nulă: $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0.$

2. Dacă numărul liniilor nenule ale matricei eşalon obținute din matricea sistemului (8) este egal cu numărul n al necunoscutelor, atunci sistemul este compatibil determinat, cu soluția unică nulă: $x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0.$

3. Dacă numărul liniilor nenule ale matricei eşalon obținute din matricea sistemului (8) este mai mic decît numărul necunoscutelor, atunci sistemul este compatibil nedeterminat. În particular, aceasta are loc în cazul în care numărul ecuațiilor sistemului inițial este mai mic decît numărul necunoscutelor sau dacă $m=n$ şi determinantul matricei sistemului este egal cu 0.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ sistemul de ecuații $\begin{cases}3x_1+5x_2+6x_3=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3=0.\end{cases}$

Rezolvare:

Reducem matricea sistemului la forma eşalon:

$$\begin{array}{r}-4\\ \\ 3\end{array}\begin{pmatrix}3&5&6\\3&8&24\\4&5&-2\end{pmatrix}\begin{array}{l}-1\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{array}{r}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{5}\end{array}\begin{pmatrix}3&5&6\\0&3&18\\0&-5&-30\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&5&6\\0&1&6\\0&-1&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&5&6\\0&1&6\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Sistemul respectiv are forma $\begin{cases} 3x_1+5x_2+6x_3=0, \\ x_2+6x_3=0. \end{cases}$

E comod să numim principale necunoscutele x_1 şi x_2. Notăm necunoscuta secundară $x_3=\alpha$ şi rezolvăm sistemul $\begin{cases} 3x_1+5x_2=-6\alpha \\ x_2=-6\alpha \end{cases}$ în necunoscutele $x_1,\ x_2$. Obținem soluția generală $x_1=8\alpha,\ x_2=-6\alpha,\ x_3=\alpha,\ \alpha\in\mathbf{C}$.

Răspuns: $S=\{(8\alpha,\ -6\alpha,\ \alpha)\,|\,\alpha\in\mathbf{C}\}$.

Exerciții propuse

A

1. Să se determine care dintre tripletele de numere sînt soluții ale sistemului de ecuații liniare $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y+z=-1 \end{cases}$ (necunoscutele se ordonează $(x,\ y,\ z)$):

a) (0, 0, 0); b) (1, 1, 1); c) (0, –1, 1); d) (3, 1, 0).

2. Să se determine dacă poate fi aplicată metoda lui Cramer şi să se rezolve în **C** sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} -x+8y+3z=2, \\ 2x+4y-z=1, \\ 2x-z=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y+9z=16, \\ 2x+2y+2z=2, \\ x+2y+3z=4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+4z=-7, \\ -2x+y+3z=-7, \\ x+2y-2z=7; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+4y+6z=-2, \\ 2x+y+z=2, \\ x+3y+z=5. \end{cases}$

3. Să se rezolve în **C**, aplicînd metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} -x+4y-7z=5, \\ x-y-2z=-2, \\ 2y-6z=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y-z=0, \\ 2x+y=0, \\ -x-y+2z=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=0, \\ x+2z=4, \\ 2x+y+z=2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x+y+3z=1, \\ x+2y+2z=3, \\ 7x+y-6z=5; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y=1, \\ x+y+z=4, \\ y+z=-3; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+z=0, \\ 2y-z=1. \end{cases}$

4. a) Nelu a achitat pentru 3 tartine şi 2 ceşti de cafea 21,5 lei, iar colegul său pentru o cafea şi 2 tartine a plătit 13 lei. Să se determine prețul unei tartine şi al unei ceşti de cafea, compunînd un sistem de ecuații liniare.

b) Altă dată Nelu a achitat pentru 2 chifle, un ceai şi 2 prăjituri 20 lei, iar colegul său a achitat pentru o chiflă, un ceai şi 3 prăjituri 22 lei. Compuneți un sistem de ecuații corespunzător acestei situații. Se pot determina prețurile produselor cumpărate? De ce?

B

5. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, prin metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x_1+(1+\mathrm{i})x_2-x_3=1, \\ x_1+\mathrm{i}x_2+2x_3=\mathrm{i}, \\ x_2+(2-\mathrm{i})x_3=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4. \end{cases}$

6. Să se stabilească dacă este compatibil sistemul:

a) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2-x_3=1, \\ 3x_1+4x_2-x_3=5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=2, \\ 2x_1+2x_2+4x_3=1, \\ x_1+x_2+6x_3=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2-3x_3=1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2+5x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3, \\ 3x_1+x_2-5x_3=0, \\ 4x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2-13x_3=-6; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1-\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+x_3=\lambda, \\ x_2+2x_3=1. \end{cases}$

7. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemele compatibile din exercițiul **6**.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul omogen (efectuînd studiul în funcție de $\lambda\in\mathbb{R}$):

a) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_1+2x_2-x_3=0, \\ x_1+3x_2=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+5x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1-\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+x_3=0, \\ x_2+2x_3=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1-2x_2+\lambda x_3=0, \\ x_1-\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_3=0. \end{cases}$

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Să se calculeze:

a) $3A-2\mathrm{i}B$; b) $\mathrm{i}A+2B$,

unde $A=\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 2 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i}+1 \end{pmatrix}$.

2. Să se afle produsele:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)$; c) $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -3\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & -1 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Să se determine valorile parametrilor $x, y\in\mathbb{R}$ pentru care sînt adevărate egalitățile:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2x-3y \\ -7x+6y & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & y-x-11 \\ 19 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} y+3x & -1 \\ 3 & y-x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Să se calculeze $A^2-5A+7I_2$, dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Să se reducă matricea la o matrice eşalon:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 6 & -4 \\ 5 & 2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

6. Să se determine tipul matricei X care satisface egalitatea $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=(3\quad 4)$.

7. Să se calculeze determinantul matricei A:

a) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3\mathrm{i} & -2\mathrm{i}\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -3 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 6 & -1 & 1\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -5\\ 5 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 6\end{pmatrix}$;

e) $A=\begin{pmatrix}a+b & b-a & b\\ b+c & c-b & c\\ c+d & a-c & a\end{pmatrix}$; f) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\mathrm{i}\\ 2 & 1 & 3\mathrm{i}\\ 4 & 5 & -2\mathrm{i}\end{pmatrix}$; g) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$; h) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

8. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, aplicînd metoda lui Gauss sau metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x_1+2x_2=4,\\ 3x_1-x_2=5;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x_1+(1-\mathrm{i})x_2=1,\\ 2x_1-\mathrm{i}x_2=\mathrm{i};\end{cases}$ c) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=-1,\\ 2x_1+x_2-2x_3=1,\\ x_1+x_2+x_3=3;\end{cases}$

d) $\begin{cases}2x_2+3x_2-5x_3=7,\\ 4x_1+8x_2-11x_3=17,\\ 2x_1-2x_2-x_3=1;\end{cases}$ e) $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1-2x_2+x_3=1,\\ x_1+x_2-2x_3=1;\end{cases}$ f) $\begin{cases}x_1-4x_2=-1,\\ 3x_1+2x_2=4,\\ 7x_1+10x_2=12;\end{cases}$

g) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=3,\\ -x_1+2x_2+x_3=6,\\ 3x_1+3x_3=10;\end{cases}$ h) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=-2,\\ x_1+3x_2-x_3=12,\\ 2x_1-4x_2+2x_3=-10.\end{cases}$

9. Un elev are o colecție de gîndaci şi păianjeni, în total 8 insecte. Gîndacii au cîte 6 picioare, iar păianjenii – cîte 8 picioare. Cîți gîndaci şi cîți păianjeni sînt în colecție, dacă toate insectele au 54 de picioare?

10. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 13 cm, iar aria sa – de 30 cm^2. Să se determine lungimile catetelor triunghiului.

11. Să se determine valorile parametrului $\alpha\in\mathbf{C}$ pentru care sistemul are doar soluția nulă:

a) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0,\\ 3x_1-x_2+\alpha x_3=0,\\ 2x_1+7x_2+x_3=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0,\\ -x_1+2x_2+x_3=0,\\ 3x_1+\alpha x_2+3x_3=0.\end{cases}$

B

12. Fie $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{7} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$. Să se determine o valoare a lui $\lambda\in\mathbb{R}$, astfel încît $\lambda\cdot A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{N})$.

13. Să se afle valorile parametrilor $x, y, u, v\in\mathbb{R}$ pentru care este adevărată egalitatea:

a) $\begin{pmatrix}x+1 & x+y\\ 0 & x-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -x-1\\ 0 & 9-2x\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-x & y\\ u+1 & v\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y & x\\ 3v & 1-2u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -8 & 2\end{pmatrix}$.

14. Fie o matrice pătratică A de ordinul 3 cu elementele $a_{ij}\in\{0, 1\}$. Să se determine valoarea cea mai mare a $\det A$.

15. Să se determine $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

16. Fie o matrice pătratică A, de ordinul 3, ale cărei elemente $a_{ij} \in \{-1, 1\}$.
a) Să se arate că det$A$ este un număr par.
b) Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare pe care o poate lua det$A$.

17. Să se reducă matricea la o matrice eşalon:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Să se calculeze produsele AB, BA (dacă există):

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ -5 & -2 & 2 \\ -13 & -7 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 3 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

19. Să se afle valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă şi să se determine inversa acesteia.

20. Să se determine matricea X care verifică egalitatea $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

21. Să se calculeze determinantul matricei A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

22. Se poate arăta că volumul paralelipipedului $A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$, unde $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_4(x_3, y_3, z_3)$, $A_1'(x_4, y_4, z_4)$, se calculează conform formulei:

$$\mathcal{V} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_1'}$, dacă $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(1, 2, 2)$, $A_4(0, 4, 2)$, $A_1'(5, 6, 8)$.

23. Să se rezolve în **C** ecuaţia:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$.

24. Să se găsească o matrice X, $X \neq I_3$, care comută cu matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

25. Să se discute compatibilitatea sistemului $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 4 - \alpha \\ \alpha x_1 + 4x_2 = 4, \ \alpha \in \mathbf{C}, \end{cases}$ în funcție de valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$.

26. Să se calculeze inversele matricelor A din exercițiul **7** (dacă există).

27. Să se calculeze inversele matricelor A din exercițiul **21** (dacă există).

28. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, aplicînd metoda lui Cramer sau metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 7; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$

29. Să se determine compatibilitatea (în funcție de $\lambda \in \mathbf{C}$) și să se rezolve sistemul omogen:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ \lambda x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

30. În două vase se află soluție de același acid, dar de diferită concentrație: în primul vas sînt 75 *l*, iar în al doilea – 50 *l* de soluție. Dacă se amestecă aceste cantități de soluție, se obține o soluție cu o concentrație de 42% de acid. Dacă se vor lua aceste soluții în cantități egale, se va obține o soluție cu o concentrație de 50% de acid. Ce cantitate de acid este în fiecare vas?

31. Distanța dintre două orașe este de 30 km. Doi bicicliști pornesc din aceste orașe unul spre celălalt. Dacă primul se pornește cu 2 ore mai devreme decît al doilea, atunci ei se vor întîlni peste 2,5 ore după ce a plecat biciclistul al doilea. Dacă al doilea biciclist se va porni cu 2 ore mai devreme decît primul, atunci ei se vor întîlni peste 3 ore după ce a plecat primul. Care este viteza fiecărui biciclist?

32. Trei persoane au plasat capitalul disponibil cu dobînzile anuale de 4%, 5% și respectiv 6%. Peste un an, ei au obținut în total 530 u.m. dobîndă. Persoana a doua a primit o dobîndă cu 70 u.m. mai mare decît prima. Dacă tot capitalul ar fost plasat cu dobînda de 5% anual, atunci dobînda ar fi constituit 500 u.m. Să se determine suma de bani plasată de fiecare persoană.

Probă de evaluare

A

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

1. Calculați: ②

a) $2\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Cu ajutorul transformărilor elementare ale liniilor, transformați matricea ②

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ într-o matrice eşalon.

3. Rezolvați în $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$, prin metoda lui Cramer, sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}2x_1-x_2=3,\\ x_1+x_2-3x_3=0,\\ -x_1+5x_3=-1.\end{cases}$ ③

4. Rezolvați în $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ sistemul de ecuații liniare omogene $\begin{cases}x_1+9x_2-6x_3=0,\\ -x_1+3x_2-2x_3=0,\\ x_1+3x_2-2x_3=0.\end{cases}$ ③

Dacă el este compatibil nedeterminat, aflați soluția generală şi o soluție particulară.

B

Timp efectiv de lucru: 90 de minute

În itemul 3 indicați litera corespunzătoare variantei corecte.

1. Efectuați operațiile: ①

a) $i\cdot\begin{pmatrix}3i & 2-i & 7+2i\\ 3-i & 0 & 1-i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & i-1 & 7-i\\ i-1 & 2 & 3+i\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-i & i-1\\ 3i & 2+i\end{pmatrix}$.

2. Determinați o matrice eşalon echivalentă cu matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 3i & 0 & 2 & -i\\ -4 & i & 1 & 5 & 2i\\ 3 & 5i & 2 & 7 & 0\end{pmatrix}$. ①

3. Determinantul matricei $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$ este egal cu **A** 1. **B** 0. **C** −4. **D** 6. ①

4. Determinați inversa matricei A din itemul **3**. ①

5. Rezolvați ecuația matricială $XA=B$, matricea A fiind din itemul **3**, iar $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. ②

6. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe, prin metoda lui Cramer sau prin metoda matricială, sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}2x_1+x_2=1,\\ 3x_1+2x_2=0,\\ x_1+2x_2-3x_3-2x_4=2,\\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4=-1.\end{cases}$ ②

7. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe sistemul de ecuații liniare $AX=O$, matricea A fiind din itemul **2**. ②

Matrice

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$$

Matrice pătratice

$m=n$

Transpusa matricei A

${}^tA$

Matrice unitate

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice-linie
Matrice-coloană
Matrice diagonală
Matrice nulă
Matrice inferior (superior) triunghiulară

Operații

$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$

$\alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})$

$(a_{ij})(b_{jk})=(d_{ik}),\ i=\overline{1,m},$

$j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p},\ d_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$

${}^t(a_{ij})=(a_{ji}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$

transformări elementare ale liniilor

Matrice eșalon

Matrice inversabilă

$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n,\ \ A^{-1}$ – inversa matricei A

Determinanți

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^i=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^i,$$

$\overline{M}_j^i$ – determinant al matricei obținute din A prin suprimarea liniei i și a coloanei j

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\cdot a_{2n-1}\cdot\ldots\cdot a_{n1}$$

Regula triunghiurilor
Regula lui Sarrus
Dezvoltarea determinantului după linie (coloană)

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},\ |A|\neq 0$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i$

Sisteme de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

A – matrice a sistemului, $\overline{A}$ – matrice extinsă

$\overline{A}=(A\,|\,B),\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$AX=B$

Sistem compatibil

Numărul liniilor nenule ale matricelor eșalon A_1, $\overline{A}_1$ este același.

Sistem incompatibil

Sistem compatibil nedeterminat

Matricea eșalon $\overline{A}_1$ are mai puțin de n linii nenule.

Sistem compatibil determinat

Matricea eșalon $\overline{A}_1$ are n linii nenule.

Metoda lui Gauss
Soluția particulară
Soluția generală

$$\begin{cases} x_k=f_k(\alpha,\beta,\ldots) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_l=f_l(\alpha,\beta,\ldots) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_p=\alpha \\ x_q=\beta \\ \dots\dots \end{cases}$$

Regula lui Cramer

Pentru $m=n$ și $\Delta=|A|\neq 0$,

$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$

Modulul

8 Paralelismul dreptelor și planelor

Obiective

- identificarea în diverse contexte şi utilizarea axiomelor, definițiilor şi teoremelor specifice geometriei în spațiu în diverse contexte;
- identificarea în situații reale şi/sau modelate şi construirea dreptelor concurente, necoplanare, paralele;
- identificarea în diverse contexte a pozițiilor relative a două drepte în spațiu, ale dreptei şi planului, ale planelor;
- construirea dreptelor ce intersectează planul, a planelor ce se intersectează şi a planelor paralele;
- aplicarea criteriilor de paralelism al dreptelor, al dreptei cu planul şi a două plane în diferite contexte.

§1 Axiomele geometriei în spațiu

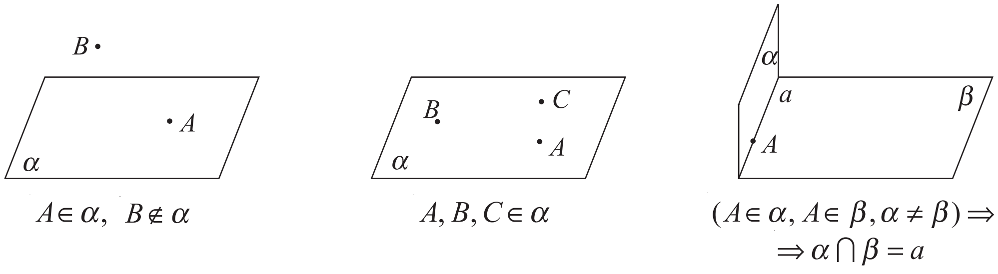
În geometria în spațiu, ca şi în geometria în plan, noțiunile şi proprietățile figurilor se stabilesc prin definiții, axiome şi teoreme. În spațiu, pe lîngă noțiunile fundamentale deja cunoscute: *punct*, *dreaptă*, *distanță* şi *măsură a unghiurilor*, apare şi noțiunea *plan*. Prin urmare, sistemul de axiome ale geometriei în plan necesită o extindere.

Vom completa grupul de axiome ale geometriei în plan cu trei axiome care exprimă proprietățile fundamentale ale punctelor, dreptelor şi planelor în spațiu:

S_1 Oricare ar fi planul, există puncte care aparțin acestui plan şi puncte care nu-i aparțin (fig. 8.1 a)).

S_2 Trei puncte necoliniare determină un plan şi numai unul (fig. 8.1 b)).

S_3 Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă (fig. 8.1 c)).



a) b) c)

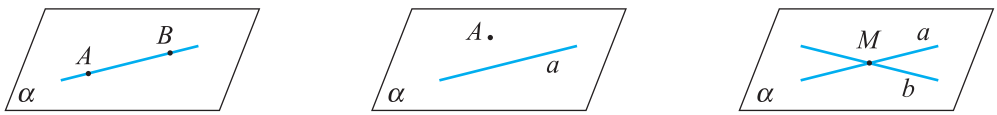
Fig. 8.1

În baza acestor axiome pot fi demonstrate următoarele teoreme:

Teorema 1. Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci orice punct al dreptei aparține acestui plan (fig. 8.2 a)).

Teorema 2. O dreaptă şi un punct ce nu aparține acestei drepte determină un unic plan (fig. 8.2 b)).

Teorema 3. Două drepte concurente determină un unic plan (fig. 8.2 c)).



$A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$

$A \notin a \Rightarrow$ punctul A şi dreapta a determină planul α

$a \cap b = M \Rightarrow$ dreptele a şi b determină planul α

a) b) c)

Fig. 8.2

Planul se notează cu literele mici ale alfabetului grecesc: α, β, γ, ... Planul determinat de o dreaptă d şi un punct A se notează (A, d) sau (d, A). Planul determinat de punctele necoliniare A, B, C se notează (ABC).

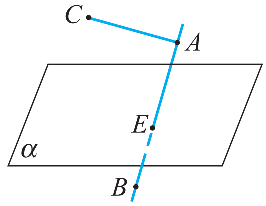
Punctele care aparțin unui plan se numesc ***puncte coplanare***, în caz contrar – ***necoplanare***.

Teorema 4 (de separare a spațiului). Orice plan α împarte mulțimea punctelor spațiului în două submulțimi nevide disjuncte de puncte, astfel încît pentru orice două puncte A, B din submulțimi diferite, segmentul AB intersectează planul α, iar pentru orice două puncte C, A din aceeaşi submulțime, segmentul CA nu intersectează planul α (fig. 8.3).

Definiții. • Fiecare dintre submulțimile din teorema 4 se numesc **semispații deschise** determinate de planul α, numit **frontiera semispațiului**.

• Reuniunea semispațiului deschis cu frontiera sa se numeşte **semispațiu închis**.

Se notează: $(\alpha A$ – semispațiul deschis cu frontiera α şi care conține punctul A; $[\alpha A$ – semispațiul închis cu frontiera α şi care conține punctul A (fig. 8.3).



$C \in [\alpha A,\ [CA] \cap \alpha = \varnothing,\ B \notin [\alpha A,\ [AB] \cap \alpha = E$

Fig. 8.3

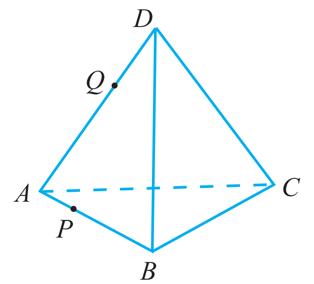
Probleme propuse

A

1. Este posibil ca numai trei vîrfuri ale unui paralelogram să aparțină unui plan?

2. Centrul unui cerc şi două puncte de pe cerc aparțin unui plan. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: „Orice punct al cercului aparține acestui plan”.

3. Fie $DABC$ un tetraedru, $P \in (AB)$, $Q \in (AD)$. Să se construiască după figura alăturată liniile de intersecție a planelor:
a) ABD şi CPQ;
b) CPQ şi ABC;
c) CPQ şi ADC.



4. Lungimea fiecărei muchii a tetraedrului $ABCD$ este a. Să se afle aria secțiunii APQ, dacă P este mijlocul muchiei BD, iar Q – mijlocul muchiei DC.

5. Se dau trei drepte care au un punct comun şi nu sînt situate în acelaşi plan. Să se determine numărul de plane determinate de aceste drepte.

6. Se dau patru drepte care au un punct comun, astfel încît oricare trei dintre ele nu sînt coplanare. Să se determine numărul de plane determinate de aceste drepte.

7. Fie patru puncte necoplanare. Să se afle:
a) numărul de drepte determinate de aceste puncte;
b) numărul de plane determinate de aceste puncte.

8. Fie cinci puncte, astfel încît oricare patru nu sînt coplanare. Să se determine:
a) numărul de drepte determinate de aceste puncte;
b) numărul de plane determinate de aceste puncte.

9. Poate oare o dreaptă să aibă cu un plan exact:
a) două puncte comune; b) 2014 puncte comune; c) un punct comun?

10. Cîte puncte comune poate avea un plan cu:
a) un segment; b) o semidreaptă; c) un cerc?

11. Trei puncte arbitrare ale unui dreptunghi aparțin unui plan. Aparține oare dreptunghiul acestui plan?

B

12. Dreptele a şi b sînt paralele. Să se arate că dacă dreapta a intersectează un plan α $(a \not\subset \alpha)$, atunci şi dreapta b intersectează acest plan.

13. Dreptele AB şi CD sînt neconcurente. Să se arate că există un unic plan ce conține dreapta AB şi care este paralel cu dreapta CD.

14. Trei drepte d_1, d_2 şi d_3 sînt concurente două cîte două în puncte diferite. Să se demonstreze că aceste drepte sînt situate în acelaşi plan.

15. Punctul A nu aparține planului determinat de punctele necoliniare B, C, D. Să se demonstreze că dreptele AD şi CB nu sînt conținute de acelaşi plan.

16. Punctele A, B, C, D aparțin şi planului α, şi planului β. Să se demonstreze că aceste puncte sînt coliniare, dacă se ştie că planele α şi β sînt distincte.

17. Fie patru puncte ce nu aparțin unuia şi aceluiaşi plan. Să se demonstreze că oricare trei puncte din cele date nu sînt coliniare.

18. Fie α şi β plane care se intersectează după dreapta a, iar punctele A, B aparțin planului α şi sînt separate de dreapta a. Să se arate că planul β separă punctele A şi B.

19. Fie α şi β plane distincte. Să se arate că există cel puțin o dreaptă neinclusă în nici unul dintre cele două plane.

20. Dreptele AB şi CD nu sînt situate în acelaşi plan. Să se arate că şi dreptele AC şi BD nu sînt situate în acelaşi plan.

§2 Pozițiile relative a două drepte în spațiu

Fie dreptele a şi b în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative a două drepte în spațiu:

a) dreptele a şi b au două puncte comune diferite (în acest caz, dreptele coincid, fiindcă două puncte diferite determină o dreaptă şi numai una);

b) dreptele a şi b au un unic punct comun (în cazul dat, dreptele se numesc ***concurente*** în acest punct) (fig. 8.4);

c) dreptele a şi b sînt situate în acelaşi plan şi nu au puncte comune (fig. 8.5);

d) dreptele a şi b nu se află în acelaşi plan. Astfel de drepte se numesc ***necoplanare*** (fig. 8.6).

În cazurile a), b), c) dreptele a, b se numesc ***coplanare*** (fig. 8.4, 8.5).

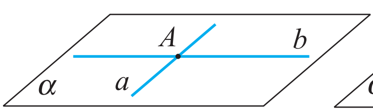


Fig. 8.4

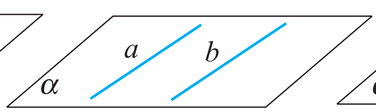


Fig. 8.5

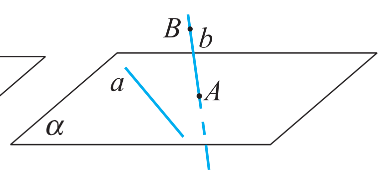


Fig. 8.6

Existența dreptelor necoplanare se demonstrează astfel:

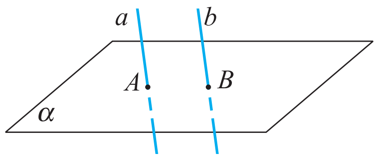
În spațiu există un plan α şi un punct B ce nu aparține acestui plan. În planul α există o dreaptă a şi un punct A ce nu aparține acestei drepte (fig. 8.6). Punctele distincte A şi B determină dreapta b, care este necoplanară cu dreapta a.

> **Definiție.** Două drepte în spațiu se numesc **paralele** dacă ele sînt situate în acelaşi plan şi nu au puncte comune sau dacă coincid (fig. 8.5).

Observație. Dacă două drepte distincte în spațiu nu au puncte comune, aceasta încă nu înseamnă că ele sînt paralele (fig. 8.6). Pentru a confirma că două drepte distincte sînt paralele în spațiu, trebuie să verificăm dacă ele sînt situate într-un plan şi nu au puncte comune.

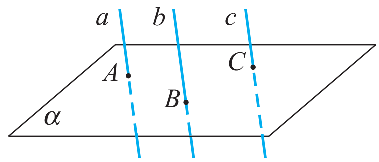
Teorema 5. Dacă una dintre două drepte distincte paralele intersectează un plan, atunci şi cealaltă dreaptă intersectează acest plan (fig. 8.7).

Teorema 6. Dacă două drepte sînt paralele cu o a treia dreaptă, atunci ele sînt paralele (fig. 8.8).



$(a \parallel b, a \cap \alpha = A) \Rightarrow b \cap \alpha \neq \varnothing$

Fig. 8.7



$(a \parallel b, a \parallel c) \Rightarrow b \parallel c$

Fig. 8.8

Exercițiu. Demonstrați teoremele 5 şi 6.

Probleme rezolvate

1. Fie punctele necoplanare A, B, C, D. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor AD, DC, CB şi BA sînt vîrfurile unui paralelogram.

Rezolvare:

Fie M, N, P şi Q mijloacele segmentelor AD, DC, CB şi respectiv BA (fig. 8.9). Atunci $[MQ]$ este linie mijlocie a triunghiului ABD, de unde rezultă că $[MQ] \parallel [DB]$, iar $[NP]$ este linie mijlocie a triunghiului BDC, deci $[NP] \parallel [DB]$. Conform teoremei 6, $[MQ] \parallel [NP]$. În mod analog se demonstrează că $[MN] \parallel [QP]$. Prin urmare, laturile opuse ale patrulaterului $MNPQ$ sînt paralele, ceea ce demonstrează că el este un paralelogram.

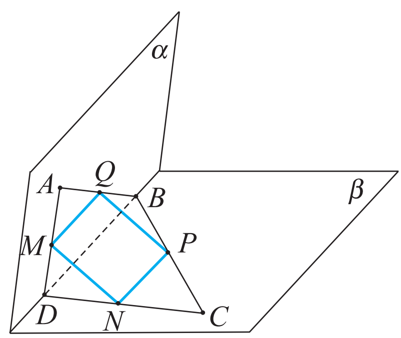


Fig. 8.9

2. Fie punctele necoplanare A, B, C, D. Punctul $E \in (AB)$, iar punctul $F \in (DC)$ (fig. 8.10). Să se arate că:

a) punctele E şi F sînt distincte;

b) dreptele EF şi AD, EF şi BC, EF şi AC, EF şi BD sînt necoplanare.

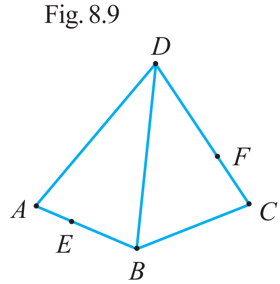


Fig. 8.10

Rezolvare:

a) Dacă am presupune că E şi F ar coincide, ar rezulta că dreptele AB şi CD sînt concurente în punctul E. Aceasta ar însemna că punctele A, B, C, D sînt coplanare, ceea ce contrazice condiția problemei.

b) Fie dreptele EF şi AD coplanare. Atunci punctele A, E, F, D sînt coplanare şi cum $B \in (AE,$ $C \in (DF,$ rezultă că punctele A, B, C şi D aparțin aceluiaşi plan, dar aceasta contrazice condiția problemei.

Raționamente asemănătoare se aplică la demonstrarea necoplanarității celorlalte perechi de drepte.

Probleme propuse

A

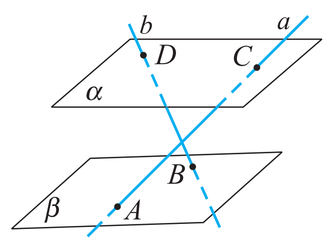
1. Dreapta d intersectează dreptele distincte d_1 şi d_2. Rezultă de aici că dreptele d, d_1 şi d_2 aparțin aceluiaşi plan?

2. Dreptele a şi b sînt paralele, iar dreapta c intersectează dreapta b. Să se determine în ce relație sînt dreptele a şi c.

3. Dreapta a intersectează planul α. Dreapta b este paralelă cu dreapta a. Va intersecta dreapta b planul α?

4. Prin vîrfurile unui paralelogram sînt construite patru drepte paralele care nu sînt situate în planul paralelogramului. Să se arate că punctele de intersecție a oricărui plan cu aceste patru drepte sînt vîrfurile unui paralelogram.

5. În figură, planele α şi β sînt paralele ($AB \nparallel DC$). Să se determine poziția relativă a dreptelor a şi b.



B

6. Fie două drepte paralele şi una dintre ele paralelă cu un plan. Să se demonstreze că şi cealaltă dreaptă este paralelă cu acest plan.

7. Fie o dreaptă paralelă cu două plane care se intersectează. Să se demonstreze că această dreaptă este paralelă cu dreapta de intersecție a acestor plane.

8. Dreptele a şi b sînt paralele, iar dreptele c şi b sînt necoplanare. În ce relație pot fi dreptele c şi a?

9. Punctul A nu aparține dreptei d. Prin punctul A se construiesc toate dreptele necoplanare cu dreapta d. Să se determine reuniunea dreptelor construite.

10. Dreptele d_1 şi d_2 sînt necoplanare, iar dreapta d este paralelă cu dreapta d_1. În ce relație sînt dreptele d şi d_2?

11. Intersecția planelor α şi β este dreapta d. Punctul $A \in \alpha$ şi $A \notin d$, punctul $B \in \beta$ şi $B \notin d$. În ce relație sînt dreptele d şi AB?

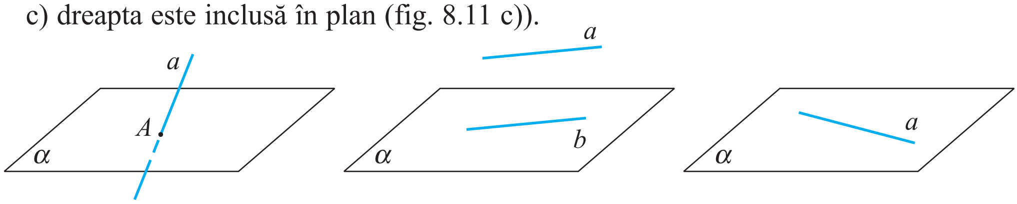
§ 3 Drepte şi plane

Fie o dreaptă şi un plan în spaţiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale poziţiilor relative ale unei drepte şi unui plan în spaţiu:

a) dreapta are un unic punct comun cu planul (vom spune că planul şi dreapta ***se intersectează*** sau dreapta este ***secantă*** cu planul) (fig. 8.11 a));

b) dreapta nu are nici un punct comun cu planul (fig. 8.11 b));

c) dreapta este inclusă în plan (fig. 8.11 c)).



$a \cap \alpha = A$ a)

$b \subset \alpha,\ a \cap \alpha = \varnothing,\ a \parallel b$ b)

$a \subset \alpha$ c)

Fig. 8.11

Definiţie. O dreaptă se numeşte **paralelă** cu un plan dacă ea nu are puncte comune cu acest plan sau dacă este inclusă în acest plan.

În figurile 8.11 b), c), dreapta a este paralelă cu planul α.

Teorema 7 (criteriul de paralelism al dreptei şi planului). Pentru ca o dreaptă să fie paralelă cu un plan este necesar şi suficient ca dreapta să fie paralelă cu o dreaptă din acest plan.

Demonstraţie

Necesitatea. Fie dreapta a ($a \not\subset \beta$) paralelă cu planul β. Considerăm în planul β un punct A, apoi construim planul α determinat de acest punct şi de dreapta a (fig. 8.12). Planele α şi β se intersectează după dreapta b. Constatăm că dreptele a şi b sînt paralele, deoarece, în caz contrar, ele, fiind situate în planul α, ar avea un punct comun, care ar aparţine şi planului β, ceea ce ar contrazice ipoteza că $a \parallel b$.

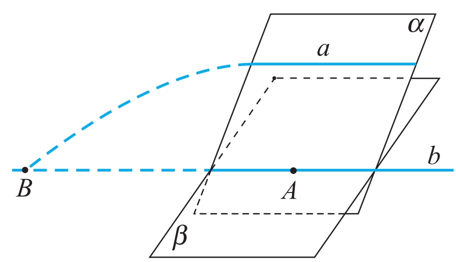
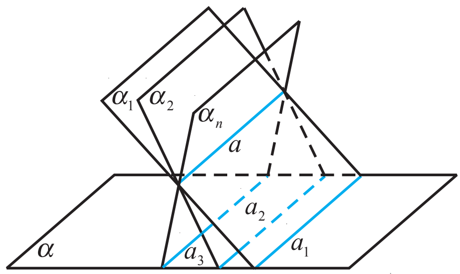


Fig. 8.12

Suficienţa. Fie dreapta a ($a \not\subset \beta$) paralelă cu o dreaptă b inclusă în planul β. În acest caz, dreapta a este paralelă şi cu planul β. Într-adevăr, dacă vom presupune că dreapta a ar avea un punct comun, B, cu planul β, atunci acest punct ar trebui să aparţină şi liniei de intersecţie a planelor β şi α (fig. 8.12), adică şi dreptei b, dar aceasta ar contrazice ipoteza că $a \parallel b$.

Cazul $a \subset \beta$ este evident. ►

Teorema 8. Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci intersecția acestui plan cu orice alt plan, care nu este paralel cu cel dat şi trece prin dreapta dată, este o dreaptă paralelă cu dreapta dată (fig. 8.13).



$$(a \parallel \alpha,\ \ a \not\subset \alpha_i,\ \ \alpha_i \nparallel \alpha) \Rightarrow \alpha_i \cap \alpha = a_i \parallel a \qquad (i = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N}^*)$$

Fig. 8.13

Exerciţiu. Demonstrați teorema 8.

Teorema 8′ (teorema „acoperişului”). Fie dreptele paralele d_1 şi d_2. Dacă un plan ce conține dreapta d_1 este secant unui plan ce conține dreapta d_2, atunci dreapta d de intersecție a acestor plane este paralelă cu dreptele d_1 şi d_2 (fig. 8.14).

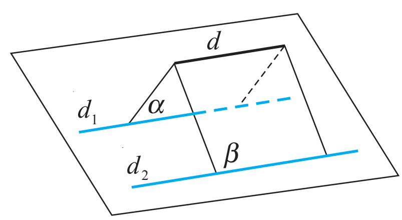


Fig. 8.14

Probleme rezolvate

1. Considerăm punctul E care nu aparține planului paralelogramului $ABCD$ şi punctul F – mijlocul segmentului AE. Să se arate că dreapta FC intersectează planul BED în centrul de greutate G al triunghiului BED (fig. 8.15).

Rezolvare:

Fie planul EAC. Punctul F şi mijlocul O al diagonalei AC a paralelogramului $ABCD$ aparțin acestui plan. Prin urmare, punctul G de intersecție a medianelor CF şi EO ale triunghiului EAC aparține planului EAC. Cum segmentul EO este mediană şi a triunghiului BED, rezultă că $(FC) \cap (BED) = G$.

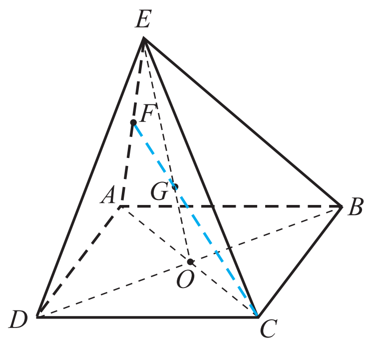


Fig. 8.15

2. Fie punctele necoplanare A, B, C, D. Punctele E, F şi G aparțin segmentelor AD, DC şi respectiv BC, fără a coincide cu extremitățile lor şi, în plus, $\dfrac{DE}{EA} \neq \dfrac{DF}{FC}$ (fig. 8.16 a)). Să se reprezinte intersecțiile planului EFG cu planele ADC, DBC, ABC şi ABD.

Rezolvare:

Evident, intersecțiile planului EFG cu planele ADC şi DBC sînt dreptele EF şi respectiv FG (fig. 8.16 b)).

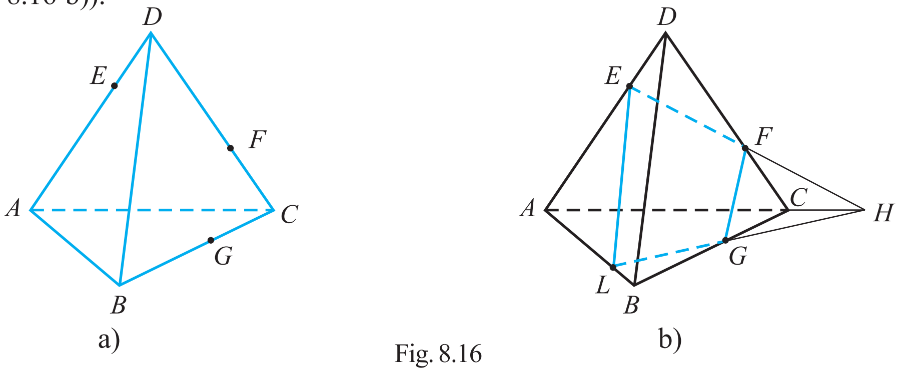


Fig. 8.16

Fie dreptele EF şi AC se intersectează în punctul H. Acest punct există, deoarece $\frac{DE}{EA} \neq \frac{DF}{FC}$. Punctul H aparține planului EFG şi planului ABC. Prin urmare, dreapta HG este dreapta de intersecție a planelor EFG şi ABC. Fie $HG \cap AB = L$. Atunci dreapta EL este dreapta de intersecție a planelor EFG şi ADB.

3. Fie d_1 şi d_2 drepte concurente situate în planul α, iar d o dreaptă ce intersectează planul α într-un punct D ce nu aparține dreptelor d_1 şi d_2 (fig. 8.17). Să se determine mulțimea dreptelor care intersectează dreptele d, d_1 şi d_2.

Rezolvare:

Fie O punctul de intersecție a dreptelor d_1 şi d_2. Orice dreaptă care trece prin punctul O şi printr-un punct A al dreptei d verifică condițiile problemei. De asemenea, orice dreaptă din planul α care trece prin punctul D şi intersectează ambele drepte d_1 şi d_2 verifică condițiile problemei. Alte drepte care ar intersecta toate dreptele d, d_1 şi d_2 nu există.

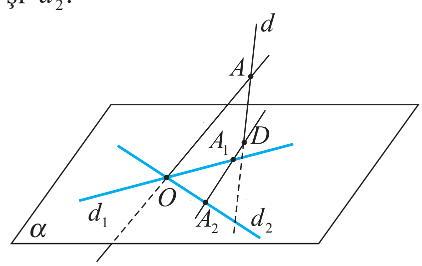


Fig. 8.17

4. Planul α este intersectat de dreptele necoplanare a şi b în punctele A şi respectiv B. Prin fiecare punct M al dreptei a se duce paralela cu dreapta b şi se notează cu M' punctul de intersecție a acestei paralele cu planul α (fig. 8.18). Să se arate că atunci cînd punctul M descrie dreapta a, punctul M' descrie o dreaptă din planul α ce trece prin punctul A.

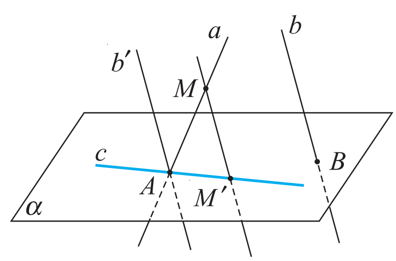


Fig. 8.18

Rezolvare:

Fie b' dreapta care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta b (care există şi este unică). Planul determinat de dreptele a şi b', concurente în A, intersectează planul α după dreapta c. Dreapta c este dreapta căutată.

Probleme propuse

A

1. În tetraedrul $ABCD$, punctul M este mijlocul muchiei BD, iar punctul N este mijlocul muchiei AD. Dreapta d este intersecția planului ABC cu planul determinat de dreapta MN şi vîrful C. În ce relație sînt dreptele d şi MN?
2. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Punctul $E \in AD$ ($AE = 2ED$), punctul $L \in AB$ ($AL = 2LB$), punctul $F \in DC$ ($DF = 2FC$), punctul $M \in CB$ ($BM = 2MC$). Determinați relația dintre dreptele EL şi FM.
3. Se dau punctele necoliniare A, B, C. Un plan paralel cu dreapta AB intersectează segmentele BC şi AC în punctele M şi respectiv N. Să se afle lungimea segmentului MN, dacă:
   a) $AB = 30$ cm şi $MB : BC = 2:3$; b) $AB = 16$ cm şi $BM : MC = 5:3$;
   c) $CM = 20$ cm şi $AB : BC = 4:5$; d) $BM = a,\ MC = c,\ AB = b$.

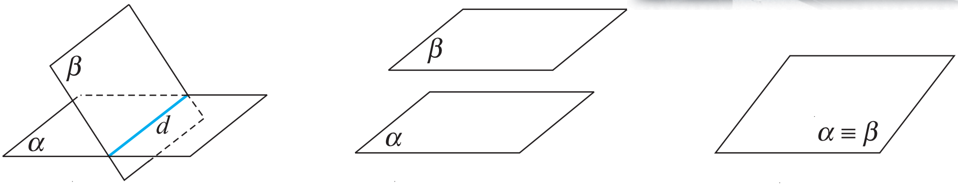
B

4. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Pe segmentele AB, BC, CD şi DA se iau punctele A_1, B_1, C_1 şi respectiv D_1, astfel încît $AA_1 : A_1B = 1:3$, $BB_1 : B_1C = 3:1$, $CC_1 : C_1D = 2:1$ şi respectiv $DD_1 : D_1A = 1:2$. Să se demonstreze că punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sînt coplanare.
5. Fie punctele A, B, C şi D necoplanare. Pe segmentele AB, BC şi CD se iau punctele A_1, B_1 şi respectiv C_1, astfel încît $AA_1 : A_1B = a$, $BB_1 : B_1C = b$ şi $CC_1 : C_1D = c$. Planul $A_1B_1C_1$ intersectează segmentul AD în punctul D_1. Să se afle raportul $DD_1 : D_1A$.
6. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Punctul $M \in AD$ şi punctul $N \in BD$. În ce relație se află dreapta MN şi planul ABC, dacă se ştie că $AM : MD = BN : ND$?
7. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABD, iar punctul N este centrul de greutate al triunghiului BDC. Să se demonstreze ca dreapta MN este paralelă cu planul ABC.

§4 Plane paralele

Fie două plane în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative a două plane în spațiu:

a) planele se intersectează după o dreaptă (fig. 8.19 a));
b) planele nu au nici un punct comun (fig. 8.19 b));
c) planele coincid (fig. 8.19 c)).



$\alpha \cap \beta = d$ a) $\alpha \cap \beta = \varnothing$ b) $\alpha \equiv \beta$ c)

Fig. 8.19

Definiție. Două plane se numesc **paralele** dacă ele nu au puncte comune sau dacă coincid.

Teorema 9 (criteriul de paralelism al planelor). Dacă două drepte concurente situate într-un plan sînt paralele cu un alt plan, atunci planele sînt paralele.

Demonstrație

Fie dreptele concurente a şi b, situate în planul α, paralele cu planul β (fig. 8.20).

Presupunem că planele α şi β nu sînt paralele. Atunci intersecția lor este dreapta c. Conform teoremei 8, dreptele a şi b sînt paralele cu dreapta c, dar aceasta contrazice axioma dreptelor paralele, deoarece obținem că în planul α printr-un punct trec două drepte diferite, a şi b, paralele cu dreapta c, ceea ce este imposibil. Prin urmare, planele α şi β sînt paralele. ▶

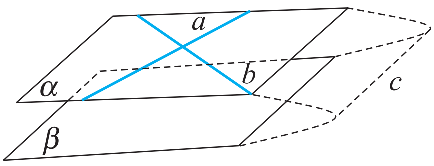
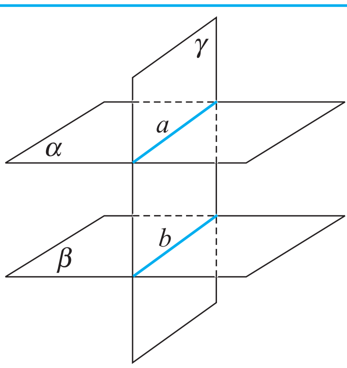


Fig. 8.20

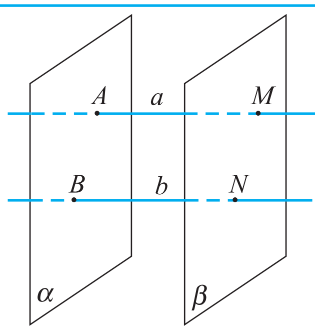
Teorema 10. Dacă două plane paralele sînt intersectate de un al treilea plan, atunci dreptele de intersecție sînt paralele (fig. 8.21 a)).

Teorema 11. Dacă două drepte paralele intersectează două plane paralele, atunci segmentele dreptelor cuprinse între aceste plane sînt congruente (fig. 8.21 b)).



$(\alpha \parallel \beta,\ \gamma \cap \alpha = a,\ \gamma \cap \beta = b) \Rightarrow a \parallel b$

a)



$(a \parallel b, \alpha \parallel \beta) \Rightarrow [AM] \equiv [BN]$,
$A, B \in \alpha,\ M, N \in \beta$

b)

Fig. 8.21

Exercițiu. Demonstrați teoremele 10 şi 11.

Probleme rezolvate

1. Segmentul AB nu intersectează planul α şi este împărțit de punctele M şi N în trei segmente, astfel încît $AM : MN = MN : NB = 1 : 2$. Prin punctele A, M, N şi B sînt trasate drepte paralele ce intersectează planul α în punctele A_1, M_1, N_1 şi respectiv B_1 (fig. 8.22). Să se afle lungimea segmentelor MM_1 şi NN_1, ştiind că $AA_1 = 2$ cm, $BB_1 = 16$ cm.

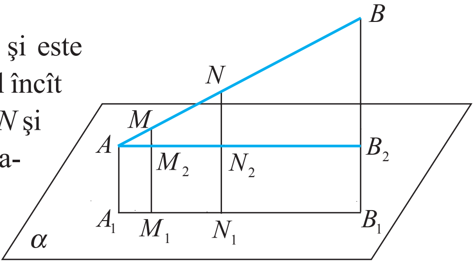


Fig. 8.22

Rezolvare:

Construim prin punctul A o dreaptă paralelă cu A_1B_1, care intersectează dreptele MM_1, NN_1 şi BB_1 în punctele M_2, N_2 şi respectiv B_2. Triunghiurile AM_2M şi AB_2B sînt asemenea, deci $MM_2 : BB_2 = AM : AB$.

Din $AM : MN = MN : NB = 1:2$ rezultă că $AB = 7AM$. Atunci $MM_2 : BB_2 = 1:7$, $MM_2 = BB_2 : 7 = 14 : 7 = 2$.

Astfel, $MM_1 = MM_2 + M_2M_1 = 2 + 2 = 4$ (cm).

În mod analog, constatăm că $\Delta ANN_2 \sim \Delta ABB_2$.
Aşadar, $NN_2 : BB_2 = AN : AB = 3AM : 7AM = 3:7$, de unde $NN_2 = \frac{3}{7}BB_2 = 6$ cm.
Prin urmare, $NN_1 = NN_2 + N_2N = 6 + 2 = 8$ (cm).

Răspuns: $MM_1 = 4$ cm, $NN_1 = 8$ cm.

2. Punctele A_1, A_2, A_3 sînt situate pe muchia piramidei $VABC$, astfel încît $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Prin aceste puncte sînt trasate plane paralele cu baza piramidei, care intersectează muchiile VB şi VC în punctele B_1, B_2, B_3 şi respectiv C_1, C_2, C_3 (fig. 8.23). Să se afle perimetrele triunghiurilor $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$, dacă perimetrele triunghiurilor ABC şi $A_3B_3C_3$ sînt $\mathscr{P}$ şi respectiv $\mathscr{P}_3$.

Rezolvare:

Segmentul A_2B_2 este linie mijlocie a trapezului $A_1A_3B_3B_1$, adică $\mathscr{P}_2 = \frac{\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_3}{2}$ (1), unde $\mathscr{P}_1$ şi $\mathscr{P}_2$ sînt perimetrele triunghiurilor $A_1B_1C_1$ şi respectiv $A_2B_2C_2$.

În mod similar, $\mathscr{P}_1 = \frac{\mathscr{P} + \mathscr{P}_2}{2}$ (2). Din (1) şi (2) obținem:

$\mathscr{P}_2 = \frac{2\mathscr{P}_3 + \mathscr{P}}{3}$, $\mathscr{P}_1 = \frac{2\mathscr{P} + \mathscr{P}_3}{3}$.

Răspuns: $\mathscr{P}_1 = \frac{2\mathscr{P} + \mathscr{P}_3}{3}$, $\mathscr{P}_2 = \frac{2\mathscr{P}_3 + \mathscr{P}}{3}$.

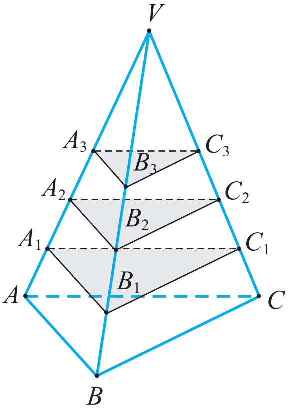


Fig. 8.23

3. Tetraedrul regulat $ABCD$ este secționat de un plan paralel cu planul feței BCD şi care trece prin punctul $E \in AC$, astfel încît $AE : EC = 2:3$ (fig. 8.24). Să se afle aria secțiunii, dacă lungimea muchiei tetraedrului este a.

Rezolvare:

Este evident că laturile triunghiului FGE sînt paralele cu laturile feței BDC şi că triunghiul FGE este echilateral. Cum $\Delta AEF \sim \Delta ACB$, obținem:

$\frac{BC}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AE + EC}{AE} = 1 + \frac{EC}{AE}$, $\frac{BC}{FE} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$,

de unde $FE = \frac{2a}{5}$.

Astfel, $\mathscr{A}_{FGE} = \frac{(EF)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{25 \cdot 4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}$.

Răspuns: $\mathscr{A}_{FGE} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}$.

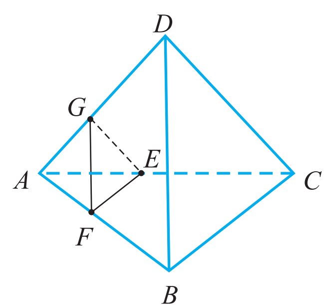


Fig. 8.24

4. Să se construiască secțiunea prismei drepte $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu planul determinat de diagonala BD_1 şi de un punct $M \in (CC_1)$.

Rezolvare:

Evident că două laturi ale poligonului obținut în secțiune sînt segmentele BM şi MD_1 (fig. 8.25).
Punctul $N = CD \cap D_1M$ este comun planului ABC şi planului secțiunii căutate. Prin urmare, punctul $P = BN \cap AD$ este comun planului ADD_1 şi planului acestei secțiuni.
Punctul $L = AA_1 \cap PD_1$ este cel de-al patrulea vîrf al poligonului obținut în secțiune.

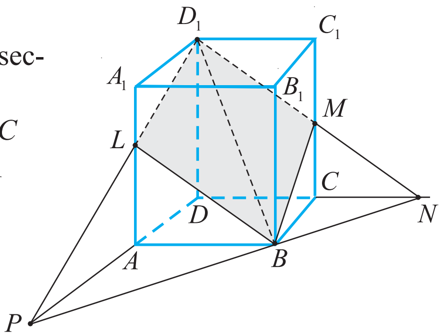


Fig. 8.25

Răspuns: Secțiunea este patrulaterul BLD_1M.

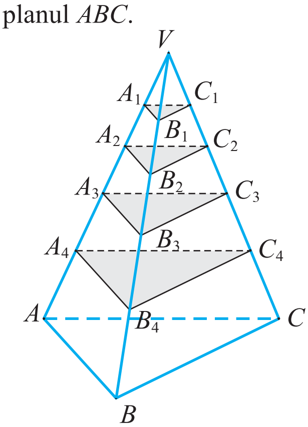
Probleme propuse

A

1. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Punctele M, N, P sînt mijloacele segmentelor AD, BD şi respectiv CD. Să se arate că planele MNP şi ABC sînt paralele.

2. Pe muchiile tetraedrului $ABCD$ sînt luate punctele $L \in AD$, $P \in AD$ $(AL = LP = PD)$, $M \in BD$ $(DM = 2BM)$, $N \in CD$ $(ND = 2NC)$.
a) Să se arate că planul MNL este paralel cu planul ABC.
b) Să se construiască punctul I_1 de intersecție a dreptei PM cu planul ABC.
c) Să se construiască punctul I_2 de intersecție a dreptei PN cu planul ABC.
d) Să se construiască intersecția planelor ABC şi PMN.

3. Punctele A_1, A_2, A_3, A_4 sînt situate pe muchia AV a piramidei triunghiulare $VABC$, astfel încît $[AA_4] \equiv [A_4A_3] \equiv [A_3A_2] \equiv \equiv [A_2A_1]$. Prin aceste puncte sînt construite plane paralele cu planul bazei piramidei, care intersectează muchiile VB şi VC în punctele B_1, B_2, B_3, B_4 şi respectiv C_1, C_2, C_3, C_4. Să se determine perimetrele triunghiurilor obținute în secțiuni, dacă perimetrul triunghiului $A_1B_1C_1$ este de 5 cm, iar perimetrul triunghiului ABC este de 40 cm.



B

4*. Prisma triunghiulară dreaptă $ABCA_1B_1C_1$ este secționată de un plan ce trece prin punctul $M \in [AA_1]$ şi care este paralel cu dreptele AB_1 şi AC_1. Să se determine perimetrul poligonului obținut în secțiune, dacă $AM = 1$ cm, $AA_1 = 3$ cm, $AB = AC = 4$ cm, $BC = 2$ cm.

5. Tetraedrul $ABCD$ este secționat de un plan ce trece prin punctul $M \in [AD]$ şi care este paralel cu planul bazei ABC. Să se afle perimetrul poligonului obținut în secțiune, dacă $AM = 5$ cm, $AD = 15$ cm, $AB = 20$ cm, $BC = 19$ cm, $AC = 18$ cm.

6. Pe muchia VA a piramidei triunghiulare $VABC$ se iau punctele A_1, A_2, A_3, astfel încît $A_1A_2 = 2AA_1$ şi $A_2A_3 = 2A_1A_2$. Prin aceste puncte sînt trasate plane paralele cu planul bazei piramidei, care intersectează muchia VB în punctele B_1, B_2, B_3, iar muchia VC – în punctele C_1, C_2, C_3. Să se afle perimetrele $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ şi $\mathscr{P}_3$ ale triunghiurilor $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ şi respectiv $A_3B_3C_3$, dacă se ştie că perimetrul triunghiului ABC este $\mathscr{P}$, iar $AA_1 : VA_3 = \lambda$.

7. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi E un punct ce nu aparține planului suport al patrulaterului $ABCD$. Pe segmentele AE, BE, CE, DE se iau punctele M, N, P şi respectiv R, astfel încît $2AM = 3ME$, $2BN = 3NE$, $2CP = 3PE$, $3DR = 2RE$.
a) Să se demonstreze că planul MNP este paralel cu planul suport al patrulaterului $ABCD$.
b) Să se construiască punctul I de intersecție a dreptei NR cu planul suport al patrulaterului $ABCD$.

8. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi E un punct ce nu aparține planului suport al patrulaterului $ABCD$. Punctele M, N, P sînt punctele de intersecție a medianelor triunghiurilor ABE, BCE şi respectiv CDE. Să se demonstreze că planul MNP trece prin punctul Q de intersecție a medianelor triunghiului ADE.

Probleme recapitulative

A

1. Segmentul AB nu intersectează planul α. Prin extremitățile segmentului AB şi prin mijlocul lui, punctul M, sînt trasate drepte paralele, care intersectează planul α în punctele A_1, B_1 şi respectiv M_1. Să se afle lungimea segmentului MM_1, dacă:
a) $AA_1 = 3{,}2$ m, $BB_1 = 2{,}3$ dm; b) $AA_1 = 19$ cm, $BB_1 = 2$ dm; c) $AA_1 = 33$ cm, $BB_1 = 75$ cm.

2. Segmentul AB nu intersectează planul α şi este împărțit de punctele M şi N în trei segmente congruente: AM, MN, NB. Prin extremitățile segmentului AB şi prin punctele M şi N sînt trasate drepte paralele ce intersectează planul α în punctele A_1, B_1, M_1 şi respectiv N_1. Să se afle lungimile segmentelor MM_1 şi NN_1, dacă se ştie că $AA_1 = 16$ cm, $BB_1 = 4$ cm.

3. Fie planele paralele α, β şi un punct M. Planul β şi punctul M sînt situate în semispații diferite limitate de planul α. Prin punctul M sînt trasate două drepte care intersectează planul α în punctele A_1 şi A_2, iar planul β – în punctele B_1 şi B_2. Să se calculeze lungimea segmentului A_1A_2, dacă $B_1B_2 = 20$ cm şi $MA_1 : A_1B_1 = 3:2$.

4. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare. Punctul $L \in DC$, astfel încît $DL = 2LC$, iar punctul M este centrul de greutate al ΔABD. Să se arate că dreapta ML este paralelă cu planul ABC.

B

5. Printr-un punct O, ce nu aparține nici unuia dintre planele paralele a şi b, sînt construite dreptele a_1, a_2, a_3 şi a_4, care intersectează planul a în punctele A_1, A_2, A_3 şi respectiv A_4, iar planul b – în punctele B_1, B_2, B_3 şi respectiv B_4.
Să se demonstreze că $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dfrac{A_3A_4}{B_3B_4} = \dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{OA_2}{OB_2} = \dfrac{OA_3}{OB_3} = \dfrac{OA_4}{OB_4}$.

6. Să se demonstreze că dacă orice dreaptă ce intersectează unul dintre cele două plane date intersectează şi al doilea plan, atunci planele sînt paralele.

7. O dreaptă intersectează planul α în punctul A. Prin punctele B şi C (B se află între A şi C) ale dreptei, situate în acelaşi semispaţiu limitat de planul α, sînt trasate două drepte paralele care intersectează planul α în punctele B_1 şi respectiv C_1. Să se afle lungimea segmentului BB_1, dacă:

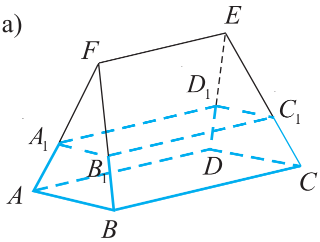
a) $CC_1 = a$ şi $AC : BC = \lambda$;
b) $CC_1 = a$ şi $AB : AC = \mu$;
c) $AB = l$ şi $AC : CC_1 = k$;
d) $AC = a,\ BC = b,\ CC_1 = c.$

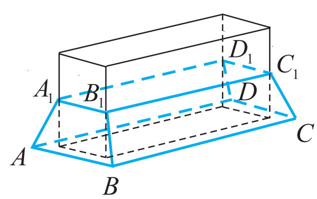
8. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare şi $AC = 12$ cm, $BD = 20$ cm. Să se determine perimetrul patrulaterului ale cărui vîrfuri sînt mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA.

9. Punctul E nu aparţine planului trapezului $ABCD$ $(BC \parallel AD)$. Punctele M şi L sînt mijloacele laturilor AB şi CD ale trapezului, iar punctele N şi P – mijloacele segmentelor BE şi CE. Să se arate că dreptele MN şi PL sînt concurente.

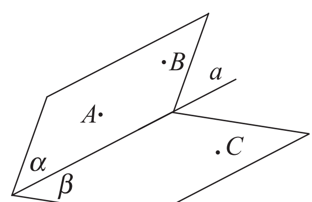
10. Fie punctele A, B, C, D necoplanare. Pe segmentele AC şi BC se iau punctele M şi respectiv N, astfel încît $AM : MC = BN : NC = m : n.$ Să se afle lungimea segmentului determinat de mijloacele segmentelor AD şi BD, dacă $MN = a$.

11. La reconstrucţia acoperişului unei case s-a luat decizia de a ridica o mansardă. Căpriorii AF, BF, CE şi DE urmează să fie tăiaţi în punctele A_1, B_1, C_1 şi respectiv D_1, astfel încît planul dreptunghiului $A_1B_1C_1D_1$ să fie paralel cu planul podului (fig. a)). Capetele căpriorilor se vor sprijini pe colţurile pereţilor mansardei (fig. b)). La ce distanţă de la colţurile podului casei trebuie tăiaţi căpriorii, astfel încît lăţimea mansardei în exterior să fie de 9 m, dacă se ştie că lăţimea podului casei este de 12 m, iar lungimea căpriorilor – de 8 m?

a)


b)


12. Tetraedrul regulat $ABCD$ este secţionat de un plan ce trece prin vîrful A şi prin mijloacele muchiilor BD şi CD. Să se afle aria secţiunii obţinute, dacă lungimea muchiei tetraedrului este $2a$.



13. Fie trei drepte necoplanare care se intersectează două cîte două. Să se demonstreze că dreptele au un punct comun.

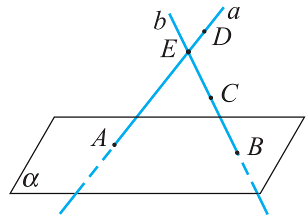
14. Se dau planele α şi β, a căror intersecţie este dreapta a. Punctele A şi B aparţin planului α, iar punctul C aparţine planului β. Să se construiască liniile de intersecţie a planului ABC cu planele α şi β.

15. Se dau punctele necoplanare A, B, C şi D. Punctul M aparţine segmentului DC. Să se construiască liniile de intersecţie a planelor ADC, CBD, ABC şi ABD cu planul care trece prin punctele M şi A şi este paralel cu dreapta BD.

16. Fie punctele necoplanare A, B, C şi D şi punctul E ce aparţine segmentului AC, astfel încît $AE : EC = 3 : 2$. Să se construiască liniile de intersecţie a planelor ADC, ADB, ABC cu planul ce trece prin punctul E şi este paralel cu planul BCD.

17. Punctul E nu aparţine planului paralelogramului $ABCD$. Să se demonstreze că linia de intersecţie a planelor ABE şi CDE este o dreaptă paralelă cu dreapta DC.

18. Prin punctul E ce nu aparţine planului α sînt duse dreptele a şi b, care intersectează planul α în punctele A şi respectiv B. Punctul D aparţine dreptei a, iar punctul C – dreptei b. Să se construiască punctul de intersecţie a dreptei DC cu planul α.



19. Fie punctele necoplanare A, B, C şi D. Punctul M este mijlocul segmentului AD, iar punctul G este intersecţia medianelor triunghiului ABC.

a) Să se construiască punctul F de intersecţie a dreptei MG cu planul BCD.

b) Să se demonstreze că punctele B, D, C, F sînt vîrfurile unui paralelogram.

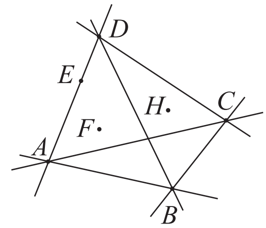
20. Se dau punctele necoplanare A, B, C şi D. Punctele E, F şi H sînt situate pe dreptele AD, DC şi respectiv BC, astfel încît $EF \nparallel AC$ şi $FH \nparallel DB$. Să se construiască punctele de intersecţie a planului EFH cu dreptele AB şi DB.

21. Fie punctele necoplanare A, B, C şi D. Se ştie că $E \in (AD)$, $F \in (ABD)$ şi $H \in (BCD)$. Să se construiască:

a) liniile de intersecţie a planului EFH cu planele ABC, ACD, ABD şi BCD;

b) punctele de intersecţie a planului ABC cu dreptele EF, EH şi FH;

c) intersecţia dreptei FH cu planul ADC.



22. Se dau punctele necoplanare A, B, C şi D. Să se demonstreze că dreapta a care trece prin mijloacele segmentelor AB şi DC, dreapta b ce trece prin mijloacele segmentelor AD şi BC şi dreapta c care trece prin mijloacele segmentelor AC şi DB au un punct comun.

23. Punctul E nu aparţine planului paralelogramului $ABCD$. Punctul M aparţine segmentului EC, iar punctul N aparţine segmentului ED şi se ştie că $EM : MC = EN : ND$.

a) Să se construiască intersecţia planelor ACE şi BDE.

b) Să se demonstreze că $MN \parallel AB$.

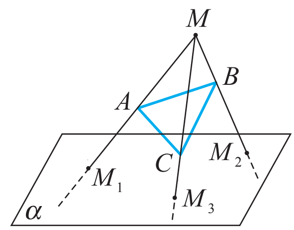
c) Să se construiască punctul P de intersecţie a planului LMN cu dreapta AD, unde L este un punct al segmentului BC.

d) Să se precizeze natura patrulaterului $NMLP$.

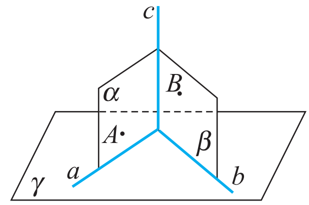
24. Fie planele distincte ABC şi α şi un punct arbitrar M ($M \notin (ABC)$ şi $M \notin \alpha$), astfel încît nici una dintre dreptele AB, AC şi BC nu este paralelă cu planul α. Punctele M_1, M_2 şi M_3 sînt intersecţiile dreptelor MA, MB şi respectiv MC cu planul α. Să se demonstreze:

a) că există în planul α punctele fixe F_1, F_2 şi F_3 prin care trec dreptele M_3M_2, M_1M_3 şi M_2M_1, oricare ar fi poziţia punctului M;

b) că punctele F_1, F_2 şi F_3 sînt coliniare.



25. Planele α şi β, a căror intersecţie este dreapta c, intersectează planul γ după dreptele a şi b. Punctul A aparţine planului α, iar punctul B aparţine planului β, astfel încît $AB \nparallel \gamma$. Să se construiască punctul de intersecţie a dreptei AB cu planul γ.



26. Fie patrulaterul convex $ABCD$ situat în planul α. Presupunem că patrulaterul $ABCD$ are laturile opuse neparalele. Punctul E nu aparţine planului α. Să se traseze intersecţiile planelor:
a) EAB şi EDC; b) EAD şi EBC; c) EAC şi EBD.

27. Punctele A, B, C şi D sînt necoplanare. Cîte plane pot fi duse la aceeaşi distanţă de aceste puncte?

Probă de evaluare

A

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

1. Prin două puncte distincte A şi B, ce aparţin unuia dintre cele două plane paralele, sînt construite două drepte paralele care intersectează celălalt plan în punctele A_1 şi respectiv B_1. Determinaţi lungimea segmentului A_1B_1, dacă $AB = 8$ cm. ②

2. Construiţi cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ şi indicaţi: ②
a) drepte paralele cu planul BCD; b) plane paralele cu dreapta A_1B_1.

3. Punctul M este mijlocul muchiei AD a tetraedrului regulat $ABCD$ cu muchiile de lungime a. Aflaţi perimetrul triunghiului MNC, unde N este punctul de intersecţie a dreptei BD cu planul ce trece prin dreapta MC, paralel cu dreapta AB. ③

4. Paralelogramele $ABCD$ şi ABB_1A_1 sînt situate în plane diferite. Determinaţi lungimea segmentului B_1C, dacă $A_1D = 8$ cm. ③

B

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

1. Dreapta a este paralelă cu planul α, iar dreapta b intersectează acest plan. Stabiliţi poziţia relativă a dreptelor a şi b. ①

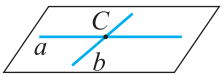
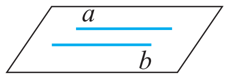
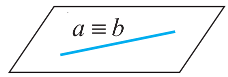
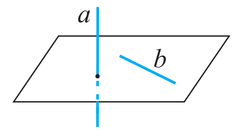
2. Fie punctele necoplanare A, B, C, D. Determinaţi poziţia faţă de planul ABC a dreptei: ③
a) EF, unde E este mijlocul segmentului AD, F – mijlocul segmentului BD;
b) GH, unde G aparţine segmentului BD, H aparţine segmentului CD şi $\frac{BG}{GD} = \frac{CH}{HD} = \frac{1}{3}$.

3. Fie piramida $SABCD$ şi punctul $E \in (SD)$. Secţionaţi această piramidă cu planul ce trece prin punctul E şi care este paralel cu planul bazei $ABCD$. ③

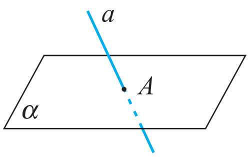
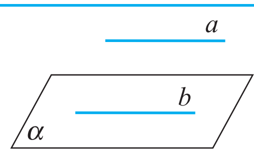
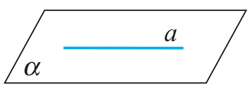
4. Construiţi secţiunea tetraedrului regulat $ABCD$, formată de planul care trece prin punctul $E \in (AD)$, astfel încît $AE : ED = 1 : 2$, şi care este paralel cu planul bazei ABC. Aflaţi aria secţiunii obţinute, dacă se ştie că aria unei feţe a tetraedrului este $\mathcal{A}$. ③

Pozițiile relative ale dreptelor și planelor

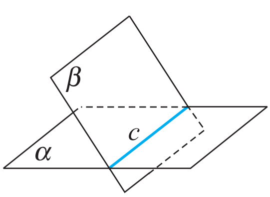
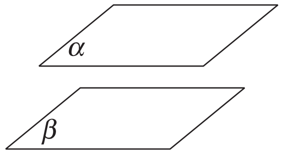
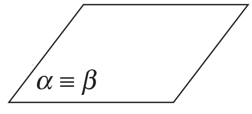
1. Pozițiile relative a două drepte

a şi *b* coplanare			*a* şi *b* necoplanare
 $a \cap b = C$	 $a \cap b = \varnothing$	 $a \equiv b$	 $a \cap b = \varnothing$

2. Pozițiile relative ale unei drepte și unui plan

a secantă cu α	*a* paralelă cu α	
 $a \cap \alpha = A$	 $b \subset \alpha,\ a \parallel b,\ a \cap \alpha = \varnothing$	 $a \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \alpha$

3. Pozițiile relative a două plane

α şi β secante	α şi β paralele	
 $\alpha \cap \beta = c$	 $\alpha \cap \beta = \varnothing$	

Modulul 9

Perpendicularitatea în spațiu

Obiective

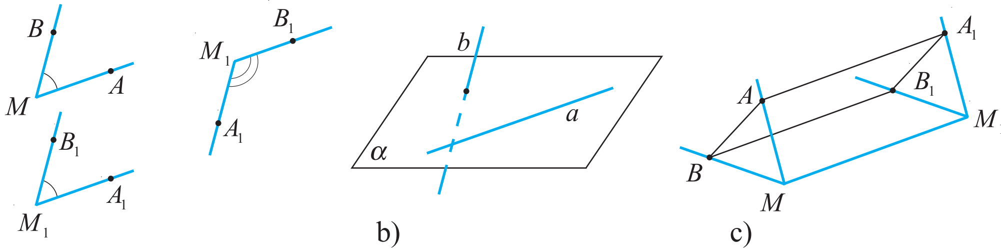
- recunoașterea în diverse contexte, descrierea, construirea dreptelor perpendiculare, a dreptei perpendiculare pe plan;
- calcularea lungimilor segmentelor, măsurilor unghiurilor diedre, aplicînd teorema celor trei perpendiculare;
- utilizarea în situații reale și/sau modelate a criteriilor de perpendicularitate a două drepte, a dreptei și planului, a două plane;
- recunoașterea, descrierea și construirea proiecțiilor ortogonale ale punctelor, segmentelor, dreptelor pe plan;
- calcularea lungimilor proiecțiilor ortogonale ale segmentelor în contexte diverse.

§ 1 Drepte şi plane perpendiculare

Lemă. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sînt congruente sau suplementare (fig. 9.1 a)).

Demonstrație

Fie unghiurile proprii AMB şi $A_1M_1B_1$ cu $[MA \parallel [M_1A_1$, $[MB \parallel [M_1B_1$, $MA = M_1A_1$ şi $MB = M_1B_1$. Considerăm cazul cînd punctul A_1 aparține semiplanului determinat de dreapta MM_1 şi punctul A, iar punctul B_1 aparține semiplanului determinat de dreapta MM_1 şi punctul B (fig. 9.1 c)). În aceste condiții, MAA_1M_1 şi MBB_1M_1 sînt paralelograme, deci $MM_1 = AA_1 = BB_1$. Prin urmare, ABB_1A_1 de asemenea este paralelogram şi $AB = A_1B_1$. Concluzia lemei rezultă din faptul că $\Delta AMB \equiv \Delta A_1M_1B_1$. ►

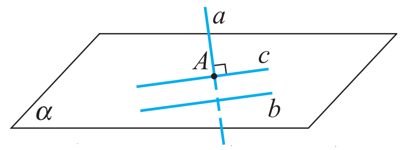


a) b) c)

Fig. 9.1

Rezultatul obţinut ne permite să vorbim despre unghiul format de două drepte necoplanare. Anume prin ***unghiul format de două drepte*** necoplanare a şi b se înţelege un astfel de unghi BMA, încît M este un punct oarecare al spaţiului, $MB \parallel b$, $MA \parallel a$ şi $m(\angle BMA) \in [0°, 180°]$ (fig. 9.1 a), b)).

Definiţie. Două drepte în spaţiu se numesc **perpendiculare** dacă măsura unghiului format de ele este de 90° (fig. 9.2).



$(c \subset \alpha,\ a \cap c = \{A\},\ c \parallel b) \Rightarrow a \perp b$

Fig. 9.2

Dreptele perpendiculare a, b se notează: $a \perp b$.

Uşor se deduce că în cubul din figura 9.3, $AA_1 \perp BC$, $AD_1 \perp CB_1$.

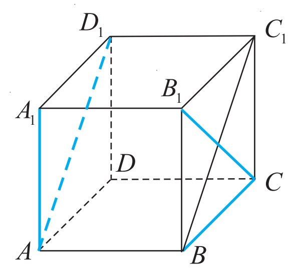


Fig. 9.3

În modulul 8 am constatat că o dreaptă şi un plan în spaţiu pot fi sau paralele, sau secante.

Definiţii. • Dreapta perpendiculară pe orice dreaptă dintr-un plan se numeşte **perpendiculară pe acest plan**. În acest caz, se mai spune că **planul este perpendicular pe dreaptă**.

• Dreapta care nu este perpendiculară pe plan şi nu este paralelă cu el se numeşte **oblică** pe acest plan (fig. 9.4).

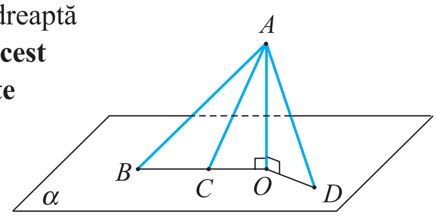


Fig. 9.4

În figura 9.4, dreapta AO este perpendiculară pe planul α, iar dreptele AB, AC, AD sînt oblice pe acest plan.

Teorema 1. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente situate într-un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe acest plan.

Demonstraţie

Fie dreptele a şi b din planul α concurente în punctul O şi o dreaptă c perpendiculară pe dreptele a şi b (fig. 9.5).

În virtutea definiţiei unghiului format de două drepte în spaţiu, se poate admite că dreptele c

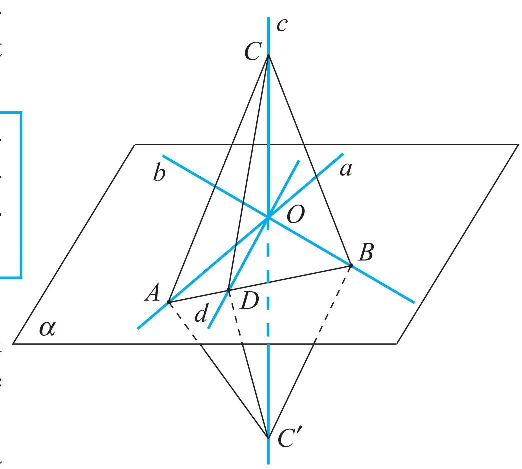


Fig. 9.5

şi d conţin de asemenea punctul O. Luăm pe dreptele a şi b două puncte arbitrare, A şi respectiv B, diferite de O. Dreapta d intersectează $[AB]$ în punctul D. Pe dreapta c luăm punctele C şi C', astfel încît $[OC'] \equiv [CO]$ (fig. 9.5).

Cum $\Delta COA \equiv \Delta C'OA$ şi $\Delta COB \equiv \Delta C'OB$ (ca triunghiuri dreptunghice cu catetele respectiv congruente), deducem că $[AC] \equiv [AC']$ şi $[BC] \equiv [BC']$. Rezultă că $\Delta ACB \equiv \Delta AC'B$ şi $\angle CAB \equiv \angle C'AB$. Aplicînd criteriul LUL, constatăm că $\Delta CAD \equiv \Delta C'AD$, deci triunghiul CDC' este isoscel. Segmentul DO este mediana corespunzătoare bazei triunghiului CDC'. Prin urmare, $[DO]$ este şi înălţime, adică $c \perp d$. ►

Existenţa şi unicitatea planului perpendicular pe o dreaptă dată, ce trece printr-un punct al acestei drepte, rezultă din

Teorema 2. Prin orice punct al unei drepte trece un unic plan perpendicular pe această dreaptă.

Exerciţiu. Demonstraţi teorema 2.

Problemă rezolvată

Să se demonstreze că printr-un punct arbitrar A, ce nu aparţine dreptei date a, trece un unic plan perpendicular pe dreapta a.

Rezolvare:

În planul $\alpha = (A, a)$ construim $AA' \perp a$ (fig. 9.6). Conform axiomei $\mathbf{S_1}$ (modulul 8), există un punct B ce nu se află în planul α, care cu dreapta a determină planul β. În planul β din punctul A' construim perpendiculara $A'C$ pe dreapta a. Planul determinat de punctele A, A', C este planul care verifică condiţia problemei.

Unicitatea planului α rezultă din teorema 2.

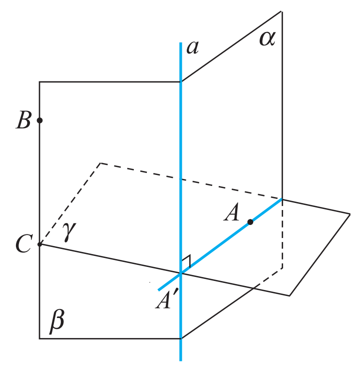


Fig. 9.6

Teorema 3. Pentru orice plan şi orice punct există o unică dreaptă care trece prin punctul dat şi este perpendiculară pe planul dat.

Demonstraţie

Fie α un plan şi A un punct arbitrar.

Demonstrăm *existenţa* dreptei. În planul α luăm două drepte concurente arbitrare, b şi c. Construim planele β şi γ, ce trec prin punctul A şi sînt perpendiculare pe dreptele b şi respectiv c (fig. 9.7).

Planele β şi γ, avînd un punct comun A, se intersectează după dreapta a. Deoarece $b \perp \beta$ şi $c \perp \gamma$, rezultă că $a \perp b$ şi $a \perp c$. În virtutea teoremei 1, deducem că dreapta a este perpendiculară pe planul α.

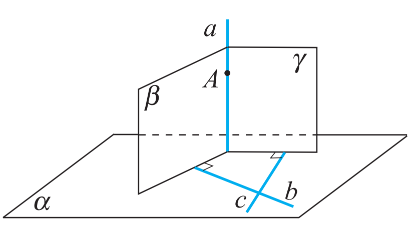


Fig. 9.7

Să demonstrăm *unicitatea* dreptei a. Presupunem că prin punctul A trece încă o dreaptă a' perpendiculară pe planul α (fig. 9.8). Atunci în planul δ, determinat de dreptele a şi a', din punctul A sînt construite două perpendiculare pe dreapta $d = \delta \cap \alpha$, ceea ce este imposibil. Contrazicerea obţinută demonstrează că dreptele a şi a' coincid. ▶

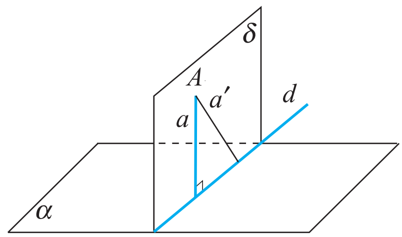
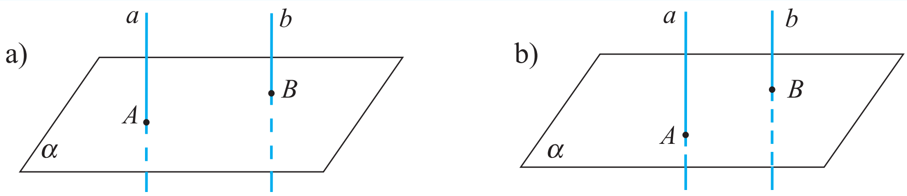


Fig. 9.8

Prezentăm unele ***proprietăţi ale perpendicularităţii dreptelor şi planelor***.

Teorema 4. Dacă un plan este perpendicular pe una dintre două drepte paralele, atunci el este perpendicular şi pe cealaltă dreaptă (fig. 9.9 a)).

Teorema 5. Dacă două drepte sînt perpendiculare pe acelaşi plan, atunci ele sînt paralele (fig. 9.9 b)).



$(a \perp \alpha,\ b \parallel a) \Rightarrow b \perp \alpha$

$(a \perp \alpha,\ b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b$

Fig. 9.9

Exerciţiu. Demonstraţi teoremele 4 şi 5.

Probleme propuse

A

1. Dreptunghiurile $CDAB$ şi $CDEF$ au o latură comună şi planele suport distincte. Să se arate că $CD \perp BF$.

2. Triunghiurile CAD şi BAD cu $m(\angle A) = 90°$ au o catetă comună şi planele suport distincte. Să se arate că AD este perpendiculară pe dreapta MN, unde M este mijlocul segmentului CD, iar N este mijlocul segmentului BD.

3. Dreapta suport a segmentului AB cu lungimea de 5 cm este perpendiculară pe planul α şi îl intersectează în punctul C. În planul α se ia un punct D, astfel încît $AD = 3$ cm, $BD = 4$ cm. Să se determine lungimea segmentului CD.

4. Din vîrful A al pătratului $ABCD$ este construită perpendiculara AM pe planul pătratului. Să se determine MB, MD şi MC, ştiind că $AB = 4$ cm, $MA = 3$ cm.

5. Din vîrful A al triunghiului ACB dreptunghic în C este construită perpendiculara AE pe planul triunghiului. Să se afle ipotenuza AB, dacă $AE = CB = a$, $EC = b$.

6. Distanţele de la punctele A şi B, situate în acelaşi semispaţiu mărginit de planul α, pînă la acest plan sînt egale cu a şi respectiv b. Să se afle lungimea segmentului AB, dacă $A_1B_1 = c$, unde A_1 şi B_1 sînt punctele de intersecţie a perpendicularelor din A şi respectiv B pe planul α.

7. Din vîrful A al dreptunghiului $ABCD$, pe planul dreptunghiului, este construită perpendiculara AE, astfel încît $AE = 4$ cm. Să se determine DE, CE, BE şi distanţa d de la punctul E la dreapta BD, dacă $AB = 6$ cm şi $AD = 4$ cm.

8. Punctul D este situat la distanţa de 9 cm de la vîrfurile triunghiului ABC dreptunghic în C, $AC = 8$ cm, $BC = 6$ cm. Să se determine distanţa de la punctul D la planul triunghiului ABC.

B

9. Distanţele de la punctele A şi B, situate în diferite semispaţii mărginite de planul α, pînă la acest plan sînt egale cu a şi respectiv b. Să se afle lungimea segmentului AB, dacă $A_1B_1 = c$, unde A_1 şi B_1 sînt punctele de intersecţie a perpendicularelor ce trec prin punctele A şi respectiv B pe planul α.

10. Din vîrful A al paralelogramului $ABCD$ pe planul lui este construită perpendiculara AE de lungimea c. Să se determine BE, CE, DE, dacă $AB = a$, $AD = b$ şi $m(\angle BAD) = \alpha$.

11. Punctul D este egal depărtat de vîrfurile triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$. Să se afle distanţa de la punctul D la planul triunghiului ABC, dacă $BC = a$, $AD = b$, $m(\angle CAB) = \alpha$.

12. Punctul M este egal depărtat de vîrfurile poligonului $ABCDE$. Să se arate că dreptele MA, MB, MC, MD şi ME formează unghiuri congruente cu planul poligonului.

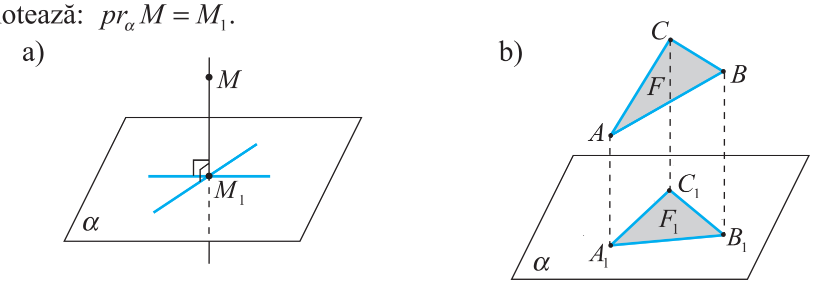
13. Dreptele d_1 şi d_2 sînt concurente în punctul A. Prin punctul A se construiesc planele α şi β, astfel încît $d_1 \perp \alpha$, $d_2 \perp \beta$. Să se arate că linia de intersecţie a planelor α şi β este perpendiculară pe planul definit de dreptele d_1 şi d_2.

14. Punctul E, ce nu aparţine planului dreptunghiului $ABCD$, este egal depărtat de vîrfurile dreptunghiului. Să se arate că dreapta ce trece prin punctul O de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ şi punctul E este perpendiculară pe planul suport al dreptunghiului $ABCD$.

§ 2 Proiecţii ortogonale. Unghi format de o dreaptă şi un plan

Definiţie. Proiecţie ortogonală a unui punct M pe un plan α se numeşte piciorul perpendicularei (punctul M_1) construite din M pe acest plan (fig. 9.10 a)).

Se notează: $pr_\alpha M = M_1$.



$(MM_1 \perp \alpha,\ M_1 \in \alpha) \Rightarrow M_1 = pr_\alpha M$ $\qquad$ $F_1 = pr_\alpha F$

Fig. 9.10

Proiecția ortogonală a unei figuri geometrice F pe un plan este mulțimea F_1 formată din proiecțiile ortogonale ale tuturor punctelor figurii geometrice date pe acest plan (fig. 9.10 b)).

Fie o dreaptă a şi un punct M. Ştim că există un unic plan α care trece prin punctul M şi este perpendicular pe dreapta a. Fie M_1 punctul de intersecție a dreptei a cu planul α (fig. 9.11 a)).

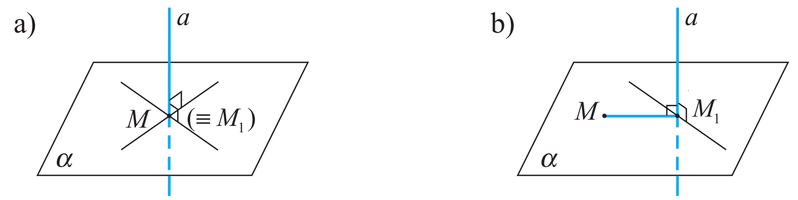


Fig. 9.11

Definiție. Punctul M_1 se numeşte **proiecție ortogonală** a punctului M pe dreapta a, iar lungimea segmentului MM_1 se numeşte **distanță** de la punctul M la dreapta a (fig. 9.11 b)).

Observație. În cele ce urmează, prin proiecție se va înțelege proiecția ortogonală.

Teorema 6. Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

Demonstrație

Dacă dreapta a este perpendiculară pe planul α, atunci proiecția ei este punctul de intersecție a acestei drepte cu planul α.

Considerăm că dreapta a nu este perpendiculară pe planul α (fig. 9.12).

Fie A şi B puncte distincte pe dreapta a. Notăm cu A_1 şi B_1 proiecțiile lor pe planul α.

În baza teoremei 5, dreptele AA_1 şi BB_1 sînt paralele, deci ele determină un plan β.

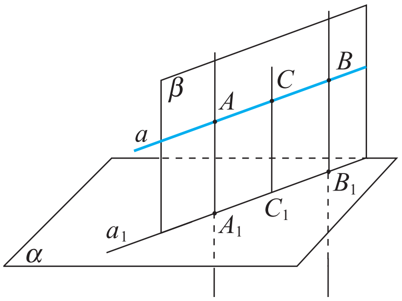


Fig. 9.12

Planului β îi aparține şi dreapta a, şi dreapta $a_1 = A_1B_1$. Dacă luăm un punct arbitrar $C \in a$, constatăm că punctul $C_1 = pr_\alpha C$ aparține planului β ($CC_1 \parallel AA_1$ şi $C \in a \subset \beta$), deci C_1 aparține dreptei de intersecție a planelor α şi β, care este dreapta A_1B_1.

Astfel, am demonstrat că proiecția oricărui punct al dreptei a este un punct al dreptei a_1, adică $pr_\alpha a = a_1$. ▶

Teorema 7 (teorema celor trei perpendiculare). Dacă proiecția a_1 pe planul α a unei drepte oblice a este perpendiculară pe o dreaptă b din planul α, atunci şi dreapta a este perpendiculară pe dreapta b.

Demonstrație

Fie dreapta AA_1 perpendiculară pe planul α, $A\in a$, $A_1\in\alpha$, deci $AA_1\perp b\subset\alpha$ (fig. 9.13). Din enunțul teoremei rezultă că dreapta b este perpendiculară pe a_1, adică dreapta b este perpendiculară și pe dreapta AA_1, și pe dreapta BA_1. Deducem că dreapta b este perpendiculară pe planul determinat de punctele A, B, A_1. Prin urmare, dreapta b este perpendiculară și pe dreapta $AB=a$ care aparține acestui plan. ▶

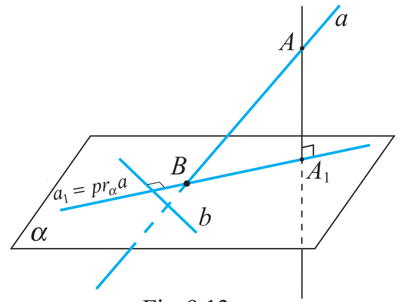


Fig. 9.13

Teorema 8 (reciproca teoremei celor trei perpendiculare). Dacă dreapta a este perpendiculară pe o dreaptă b din planul α și nu este perpendiculară pe plan, atunci proiecția a_1 a dreptei a pe planul α este perpendiculară pe dreapta b.

Demonstrație

Dreapta AA_1 (fig. 9.13) este perpendiculară pe planul α, deci $AA_1\perp b\subset\alpha$ și din enunțul teoremei rezultă că $AB\perp b$, adică dreapta b este perpendiculară pe planul ABA_1. Prin urmare, b este perpendiculară pe dreapta $a_1=BA_1=pr_\alpha a$. ▶

Teorema 9. Fie un plan α, un punct A ce nu aparține planului α, un punct B ce aparține planului α și $A_1=pr_\alpha A$. Atunci $AA_1\le AB$ (fig. 9.14).

Demonstrație

Într-adevăr, segmentul AA_1 este perpendicular pe planul α, deci și pe segmentul BA_1. Rezultă că triunghiul AA_1B este dreptunghic în A_1. Prin urmare, $AA_1\le AB$, egalitatea avînd loc numai dacă B coincide cu A_1 $(AB\perp\alpha)$. ▶

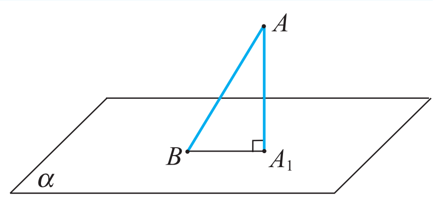


Fig. 9.14

Definiție. Distanță de la un punct la un plan se numește lungimea segmentului avînd o extremitate punctul dat și cealaltă – proiecția punctului pe acest plan.

În figura 9.14, lungimea segmentului AA_1 este distanța de la punctul A la planul α.

Teorema 10. Dacă între laturile triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ au loc relațiile $[AB]\equiv[A_1B_1]$, $[AC]\equiv[A_1C_1]$ și $BC>B_1C_1$, atunci $m(\angle BAC)>m(\angle B_1A_1C_1)$.

Din teorema 10 rezultă că măsura unghiului format de o dreaptă și proiecția ei pe un plan este mai mică decît măsura unghiului format de această dreaptă și oricare altă dreaptă din plan.

Într-adevăr, fie un plan α și o oblică a $(a\not\perp\alpha,\ a\not\parallel\alpha)$, care intersectează planul în punctul A. Considerăm pe dreapta a un punct B, diferit de A, și construim $B_1=pr_\alpha B$ (fig. 9.15).

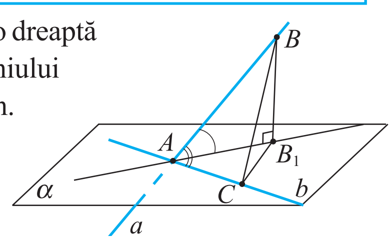


Fig. 9.15

Pe o dreaptă b din planul α ($b \neq AB_1$), ce trece prin punctul A, considerăm un punct C, astfel încît $AC = AB_1$.

Constatăm că între laturile triunghiurilor CAB şi B_1AB au loc relațiile din ipoteza teoremei 10: $CA = B_1A$, $[AB]$ este latura comună şi $CB > BB_1$, ca ipotenuza şi respectiv cateta triunghiului CB_1B dreptunghic în B_1. Prin urmare, $m(\angle BAC) > m(\angle BAB_1)$.

În cazul în care dreapta nu este perpendiculară pe plan este justificată următoarea

Definiție. Unghi format de o dreaptă şi un plan se numeşte unghiul ascuțit format de această dreaptă şi proiecția ei ortogonală pe acest plan.

În figura 9.16, unghiul φ este unghiul format de dreapta a şi planul α.

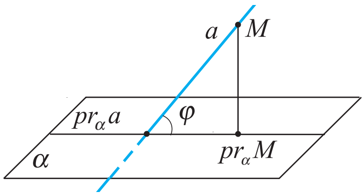


Fig. 9.16

Observație. Prin ***unghiul format de un segment şi un plan*** vom înțelege unghiul format de dreapta suport a segmentului dat şi acest plan.

Teorema 11. Lungimea proiecției unui segment pe un plan este egală cu produsul dintre lungimea acestui segment şi cosinusul unghiului format de segment şi plan.

Demonstrație

Fie un segment AB, un plan α ($[AB] \nparallel \alpha$), proiecțiile A_1 şi B_1 ale punctelor A şi respectiv B pe planul α şi D – punctul de intersecție a dreptei AB cu planul α (fig. 9.17).

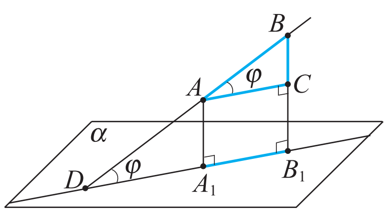


Fig. 9.17

Fie C punctul de intersecție a dreptei BB_1 cu dreapta ce trece prin A paralelă cu dreapta A_1B_1. Constatăm că triunghiul ABC este dreptunghic în C şi au loc relațiile $m(\angle BAC) = m(\angle ADA_1) = \varphi$. Astfel, în triunghiul ABC avem $AC = AB\cos\varphi$ şi, cum $AC = A_1B_1$, rezultă că $A_1B_1 = AB\cos\varphi$.

Fie punctele A, B situate în semispații diferite limitate de planul α (fig. 9.18).

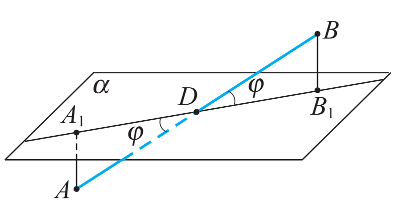


Fig. 9.18

Atunci $A_1B_1 = A_1D + DB_1$ şi din triunghiurile AA_1D şi BB_1D avem

$A_1D = AD\cos\varphi$, $DB_1 = DB\cos\varphi$.

Prin urmare, $A_1B_1 = AD\cos\varphi + DB\cos\varphi =$
$= (AD + DB)\cos\varphi = AB\cos\varphi$.

Celelalte cazuri ($[AB] \parallel \alpha$, ...) sînt evidente. ►

Probleme propuse

A

1. Triunghiurile isoscele ABC şi ABD au baza comună AB şi $C \notin (ABD)$, iar punctul M este mijlocul segmentului AB.
a) Să se arate că dreapta AB este perpendiculară pe planul MCD.
b) Să se construiască proiecţia semidreptei suport a medianei MC pe planul suport al triunghiului ABD, dacă unghiul CMD este ascuţit.
c) Să se afle lungimea proiecţiei medianei MC pe planul ABD, dacă $MC = 4$ cm, $MD = 8$ cm, $CD = 6$ cm.
d) Să se determine distanţa de la punctul D la planul ABC, folosind datele de la punctul c).

2. Segmentul A_1B_1 este proiecţia ortogonală a segmentului AB pe planul α. Să se afle:
a) lungimea segmentului A_1B_1, dacă $AA_1 = 9$ cm, $BB_1 = 13$ cm, $AB = 5$ cm;
b) cosinusul unghiului format de segmentul AB şi planul α.

3. Distanţa de la punctul A la planul α este de 3 cm. Oblicele AC şi AB $(C, B \in \alpha)$ la planul α au lungimile de 6 cm. Punctul M este mijlocul segmentului CB, iar $A_1 = pr_\alpha A$. Să se determine lungimea segmentului A_1M, dacă:
a) $m(\angle CAB) = 90°$; b) $m(\angle CAB) = 60°$.

4. Dintr-un punct care nu aparţine unui plan sînt construite două oblice la acest plan, cu lungimile de 30 cm şi 25 cm. Diferenţa lungimilor proiecţiilor oblicelor este egală cu 11 cm. Să se determine distanţa de la punct la plan.

5. Într-o încăpere, o grindă este instalată pe doi piloni, cu lungimile de 3 m şi 5 m. Să se afle distanţa de la podea la punctul ce împarte lungimea grindei în raportul de 2 : 3, considerînd de la pilonul mai scurt.

B

6. Punctul V nu aparţine planului suport al hexagonului regulat $ABCDEF$ şi este egal depărtat de vîrfurile lui.
a) Să se demonstreze că dreapta ce trece prin punctul V şi centrul O al hexagonului este perpendiculară pe planul suport al hexagonului.
b) Să se demonstreze că dreptele VA, VB, VC, VD, VE, VF formează cu planul suport al hexagonului şase unghiuri congruente.

7. Punctul E, ce nu aparţine planului suport al patrulaterului convex $ABCD$, este egal depărtat de vîrfurile lui.
a) Să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.
b) Să se demonstreze că perpendiculara ce trece prin punctul E pe planul suport al patrulaterului $ABCD$ trece şi prin centrul cercului circumscris lui.
c) Să se demonstreze că cele patru unghiuri formate de dreptele EA, EB, EC, ED cu planul suport al patrulaterului $ABCD$ sînt congruente.

8. Semidreapta $[OC$ formează unghiuri congruente cu semidreptele $[OA$ şi $[OB$. Să se afle lungimea proiecţiei segmentului OC pe planul AOB, dacă $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha$, $m(\angle AOB) = 2\beta$, iar $OC = c$.

§ 3 Unghi format de două plane (unghi diedru)

Amintim că orice dreaptă a dintr-un plan α împarte mulţimea punctelor planului α ce nu aparţin dreptei a în două submulţimi α_1 şi α_2, care se numesc ***semiplane deschise***. Dreapta a determină atît semiplanul α_1, cît şi semiplanul α_2. Reuniunea semiplanului deschis cu dreapta ce-l determină se numeşte ***semiplan închis***. Planul α se numeşte ***plan suport*** şi pentru semiplanul α_1, şi pentru semiplanul α_2.

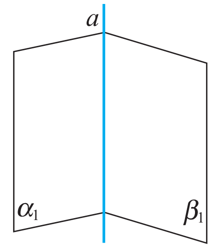


Fig. 9.19

Definiţie. Reuniunea a două semiplane închise, limitate de aceeaşi dreaptă, se numeşte **unghi diedru** (fig. 9.19).

Unghiul diedru al semiplanelor α_1, β_1 se notează $\angle(\alpha_1\beta_1)$.

Dreapta a se numeşte ***muchia unghiului diedru*** $\angle(\alpha_1\beta_1)$, iar semiplanele α_1 şi β_1 se numesc ***feţele unghiului diedru***.

Unghiul diedru format de două semiplane ce coincid se numeşte ***unghi nul***.

Unghiul diedru format de semiplanele α_1 şi β_1 a căror reuniune este un plan se numeşte ***unghi diedru plat***.

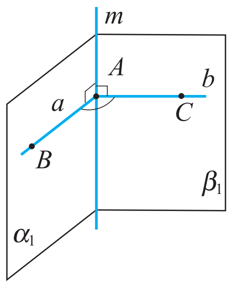
Unghi diedru propriu se numeşte unghiul diedru diferit de cel nul şi de cel plat.

Interiorul unghiului diedru propriu se numeşte intersecţia semispaţiului determinat de planul suport al lui α_1, ce conţine semiplanul β_1, cu semispaţiul determinat de planul suport al lui β_1, ce conţine semiplanul α_1.

Fie $\angle(\alpha_1\beta_1)$ un unghi diedru propriu şi A un punct oarecare pe muchia m a acestuia. Din punctul A, în fiecare dintre semiplanele α_1 şi β_1, construim perpendicularele a şi b (fig. 9.20 a)). Astfel, am obţinut un unghi plan cu vîrful în punctul A, laturile lui fiind semidreptele $[AB$ şi $[AC$ $(C \in b,\ B \in a)$.

Acest unghi plan poate fi obţinut la intersecţia unghiului diedru $\angle(\alpha_1\beta_1)$ cu un plan γ perpendicular pe muchia m a acestui unghi, ce trece prin punctul A (fig. 9.20 b)).

a)



b)

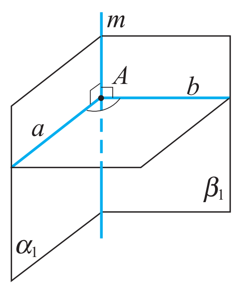


Fig. 9.20

Definiţie. Intersecţia unui unghi diedru cu un plan perpendicular pe muchia lui se numeşte **unghi liniar (unghi plan) al unghiului diedru**.

Se poate arăta că toate unghiurile liniare ale unuia şi aceluiaşi unghi diedru sînt congruente.

Definiție. **Măsură a unghiului diedru** se numește măsura unui unghi liniar al acestuia.

Revenind la figura 9.20 a), scriem că

$$m(\angle(\alpha_1\beta_1)) = m(\angle BAC).$$

Definiții. • **Semiplanele** α_1 și β_1 se numesc **perpendiculare** dacă $m(\angle(\alpha_1\beta_1)) = 90°$.
• În acest caz, planele suport respective, α și β, se numesc **plane perpendiculare**.

Se notează: $\alpha_1 \perp \beta_1$, respectiv $\alpha \perp \beta$.

Teorema 12. Două plane sînt perpendiculare dacă și numai dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan.

Demonstrație

Necesitatea. Dacă două plane sînt perpendiculare, atunci dreapta suport a oricărei laturi a unghiului liniar este perpendiculară pe planul ce nu o conține.

Suficiența. Fie planul α trece prin dreapta a, perpendiculară pe planul β (fig. 9.21).

Planele α și β se intersectează după dreapta c, iar dreptele a și c se intersectează în punctul A.

În planul β, prin punctul A construim o dreaptă b perpendiculară pe dreapta c. Constatăm că unghiul BAC este unghiul liniar al unghiului diedru format de planele α și β. Cum $a \perp \beta$, rezultă că $a \perp b$. Așadar, $m(\angle(\alpha\beta)) = 90°$, de unde $\alpha \perp \beta$. ►

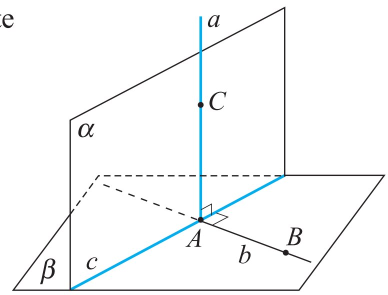
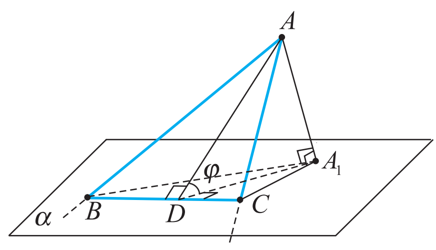


Fig. 9.21

Teorema 13. Dacă φ este măsura unghiului diedru format de planul unui triunghi ABC și un plan α, $\mathcal{A}_\Delta$ – aria triunghiului ABC, $\mathcal{A}_{pr_\alpha\Delta}$ – aria proiecției ortogonale a triunghiului ABC pe planul α, atunci $\mathcal{A}_{pr_\alpha\Delta} = \mathcal{A}_\Delta \cdot \cos\varphi$ (fig. 9.22).



$\Delta A_1BC = pr_\alpha \Delta ABC$, $\mathcal{A}_{\Delta A_1BC} = \mathcal{A}_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$

Fig. 9.22

Probleme rezolvate

1. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = BC = 8$ cm și $AC = 5$ cm. Din vîrfurile A și B se construiesc perpendicularele AA_1 și BB_1 în același semispațiu mărginit de planul ABC, astfel încît $AA_1 = 12$ cm și $BB_1 = 6$ cm (fig. 9.23). Să se determine:

a) lungimea segmentului CD_1, unde D_1 este mijlocul $[A_1B_1]$;

b) distanța de la punctul C la dreapta A_1B_1;

c) măsura unghiului diedru format de fețele ABC și A_1B_1C.

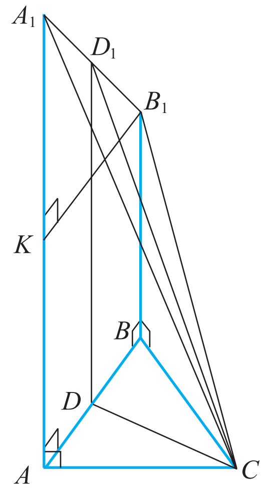


Fig. 9.23

Rezolvare:

a) Distanța de la punctul C la mijlocul D_1 al segmentului A_1B_1 se calculează folosind triunghiul dreptunghic DD_1C ($AA_1 \parallel DD_1 \Rightarrow DD_1 \perp (ABC)$). Segmentul DD_1 este linie mijlocie a trapezului AA_1B_1B, deci $DD_1 = 9$ cm, iar segmentul DC este mediană a triunghiului ABC. Folosind formula de calcul al lungimii medianei unui triunghi ($m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$), obținem că $DC = \frac{1}{2}\sqrt{114}$ cm.

Aplicînd teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic CDD_1, obținem că $D_1C = \sqrt{DC^2 + DD_1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 114 + 81} = \sqrt{109{,}5}$ (cm).

b) Distanța de la punctul C la dreapta A_1B_1 este egală cu înălțimea triunghiului A_1CB_1, construită din vîrful C. Aplicînd teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic A_1AC, obținem că $A_1C = 13$ cm. În mod analog, în triunghiurile dreptunghice B_1BC şi A_1KB_1 avem $B_1C = 10$ cm şi respectiv $A_1B_1 = 10$ cm.


Heron din Alexandria

Distanța de la punctul C la drepata A_1B_1 poate fi determinată astfel: $h_c = \frac{2\mathcal{A}_{A_1B_1C}}{A_1B_1}$.

Aflăm aria triunghiului A_1B_1C folosind formula lui Heron[1]:

$$\mathcal{A}_{A_1B_1C} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{33}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{13}{4}\sqrt{231} \text{ (cm).}$$

Atunci $h_c = \dfrac{2 \cdot \frac{13}{4}\sqrt{231}}{10} = \frac{13}{20}\sqrt{231}$ (cm).

c) Triunghiul ABC este proiecția triunghiului A_1B_1C pe planul triunghiului ABC. Prin urmare, măsura φ a unghiului diedru format de planele ABC şi A_1B_1C se determină folosind relația $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{A_1B_1C} \cdot \cos\varphi$.

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5}{4}\sqrt{231}$ cm^2, deci $\cos\varphi = \frac{5}{13}$, iar $\varphi = \arccos\frac{5}{13}$.

Răspuns: a) $\sqrt{109{,}5}$ cm; b) $\frac{13}{20}\sqrt{231}$ cm; c) $\varphi = \arccos\frac{5}{13}$.

Observație. Problema 1 c) arată că măsura unui unghi diedru poate fi calculată fără a construi unghiuri liniare ale unghiului diedru respectiv.

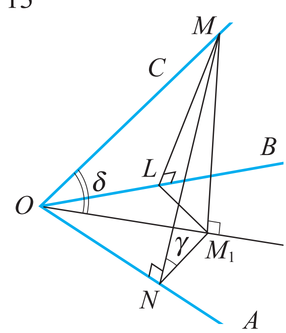


Fig. 9.24

2. Semidreptele necoplanare $[OA$, $[OB$, $[OC$ cu originea comună sînt construite astfel, încît $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha < 90°$, $m(\angle AOB) = 2\beta$ (fig. 9.24).

a) Să se demonstreze că proiecția semidreptei $[OC$ pe planul OAB este bisectoarea unghiului AOB.

[1] Heron din Alexandria (sec. 1 d.H.) – matematician grec.

b) Să se determine măsura unghiului diedru care are muchia OA.

c) Să se afle măsura unghiului format de dreapta OC şi planul OAB.

Rezolvare:

a) Fie M_1 proiecţia unui punct $M \in [OC$ pe planul OAB, iar N şi L punctele de intersecţie a dreptelor ce trec prin punctul M şi care sînt perpendiculare pe dreptele OA şi respectiv OB. Dreptele NM_1 şi LM_1 sînt proiecţiile dreptelor MN şi respectiv ML pe planul OAB. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $NM_1 \perp OA$ şi $LM_1 \perp OB$.

Cum $\Delta ONM \overset{\text{IU}}{\equiv} \Delta OLM$, rezultă că $[ON] \equiv [OL]$ şi $[MN] \equiv [ML]$.

Deoarece $\Delta MNM_1 \overset{\text{IC}}{\equiv} \Delta MLM_1$, rezultă că $[NM_1] \equiv [LM_1]$.

$\Delta ONM_1 \overset{\text{CC}}{\equiv} \Delta OLM_1 \Rightarrow \angle NOM_1 \equiv \angle LOM_1$, adică semidreapta $[OM_1$ este bisectoare a unghiului AOB, c.c.t.d.

b) Din triunghiurile dreptunghice OMN, ONM_1, MNM_1 obţinem:

$$ON = OM\cos\alpha,\quad NM = OM\sin\alpha;\quad NM_1 = ON\,\text{tg}\beta = OM\cos\alpha\,\text{tg}\beta;$$

$$\cos\gamma = \frac{NM_1}{NM} = \frac{OM\cos\alpha\,\text{tg}\beta}{OM\sin\alpha} = \text{ctg}\alpha\,\text{tg}\beta.\ \text{Astfel, } \gamma = \arccos(\text{ctg}\alpha\,\text{tg}\beta).$$

c) Din triunghiurile dreptunghice ONM_1 şi MOM_1 avem:

$$OM_1 = \frac{ON}{\cos\beta} = \frac{OM\cos\alpha}{\cos\beta},\quad \cos\delta = \frac{OM_1}{OM} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\ \text{de unde } \delta = \arccos\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right).$$

Răspuns: b) $\gamma = \arccos(\text{ctg}\alpha\,\text{tg}\beta)$; c) $\delta = \arccos\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)$.

3. Se ştie că punctul M, care nu se conţine în planul unui poligon, este egal depărtat de vîrfurile acestuia. Să se demonstreze că acest poligon este inscriptibil.

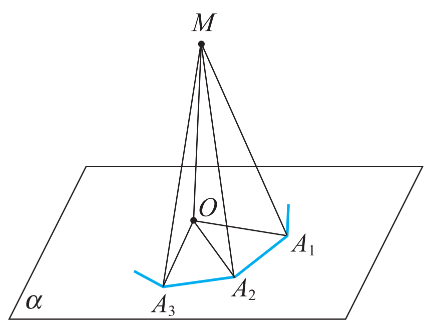


Fig. 9.25

Rezolvare:

Fie punctul M nu aparţine planului poligonului $A_1A_2A_3\ldots A_n$ şi $[MA_1] \equiv [MA_2] \equiv [MA_3] \equiv \ldots \equiv [MA_n]$ (fig. 9.25). Punctul O este proiecţia punctului M pe planul poligonului. Atunci triunghiurile OMA_1, OMA_2, OMA_3, ..., OMA_n sînt dreptunghice şi congruente (criteriul IC), de unde deducem că $[OA_1] \equiv [OA_2] \equiv \ldots \equiv [OA_n]$. Prin urmare, punctul O din planul poligonului este egal depărtat de vîrfurile lui, adică poligonul este inscriptibil şi punctul O este centrul cercului circumscris.

Observaţie. Punctele dreptei OM sînt egal depărtate de vîrfurile poligonului $A_1\ldots A_n$.

4. În una dintre feţele unghiului diedru $\angle(\alpha\beta)$ de măsură φ este dusă dreapta AD, care formează cu muchia b a unghiului diedru un unghi de măsură δ (fig. 9.26). Să se determine măsura γ a unghiului format de dreapta AD cu cealaltă față a unghiului diedru.

Rezolvare:

Fie $\angle ABC$ unghiul liniar al unghiului diedru $\angle(\alpha\beta)$. Conform condiției, $m(\angle ABC)=\varphi$, $m(\angle ADB)=\delta$. Deoarece $AC\perp\beta$, rezultă că $\angle ADC$ este cel vizat în problemă. Din triunghiurile dreptunghice ABD, ACB și ACD avem: $AB = AD\sin\delta$,
$AC = AB\sin\varphi = AD\sin\delta\sin\varphi$, $AC = AD\sin\gamma$.
De aici obținem $AD\sin\gamma = AD\sin\delta\sin\varphi$.
Prin urmare, $\sin\gamma = \sin\delta\sin\varphi$.

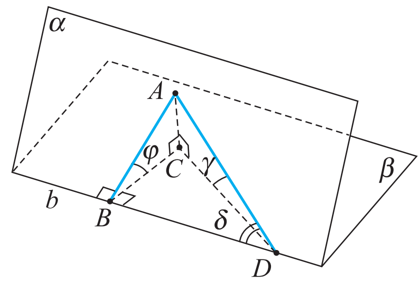


Fig. 9.26

5. Fie punctul $A\notin\alpha$ și din acest punct sînt construite oblica AB și perpendiculara AO pe planul α, unde B este piciorul oblicei, iar O – piciorul perpendicularei. Prin piciorul oblicei este construită în planul α dreapta BC, care formează cu proiecția oblicei un unghi de măsură δ. Fie φ și γ mărimile unghiurilor formate de oblica AB cu proiecția ei OB și respectiv cu dreapta BC (fig. 9.27). Să se arate că $\cos\gamma = \cos\varphi\cos\delta$.

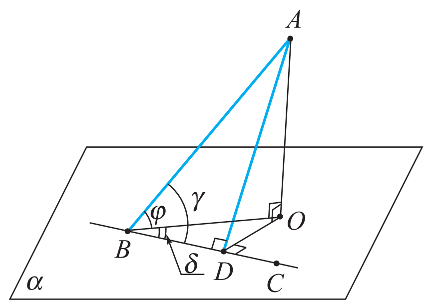


Fig. 9.27

Rezolvare:

Construim în planul α dreapta $OD\perp BC$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $AD\perp BC$. Fie $AB = x$. Atunci din triunghiurile dreptunghice AOB, BDO și ADB obținem: $BO = x\cos\varphi$, $BD = BO\cos\delta = x\cos\varphi\cos\delta$, $BD = x\cos\gamma$.

De aici rezultă: $\cos\gamma = \cos\varphi\cos\delta$.

Probleme propuse

A

1. Triunghiurile echilaterale ABC și ABD au o latură comună AB și planele suport ale acestor triunghiuri formează un unghi diedru drept. Să se determine lungimea segmentului CD, dacă $AB = 2$ cm.
2. Laturile triunghiului echilateral ABC sînt de 3 cm. Latura AB a triunghiului este situată în planul α. Unghiul diedru format de planul ABC și planul α are măsura de 30°. Să se afle:
   a) lungimea proiecției medianei triunghiului ABC corespunzătoare vîrfului C pe planul α;
   b) distanța de la punctul C la planul α.
3. Prin baza mică a unui trapez este construit un plan. Distanța de la punctul de intersecție a diagonalelor trapezului la plan este de 6 cm, iar raportul lungimilor bazelor este 3 : 2. Să se afle distanța de la baza mare la planul construit.
4. Prin una dintre laturile unui paralelogram este construit un plan. Distanța de la latura opusă pînă la plan este de 10 cm. Să se determine distanța de la punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului pînă la plan.

B

5. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este proiecția ortogonală a ΔABC pe planul α. Să se afle cosinusul unghiului diedru format de planul ABC cu planul α, dacă $AA_1 = BB_1 = 3$ cm, $CC_1 = 8$ cm, $A_1B_1 = 13$ cm, $A_1C_1 = C_1B_1 = 12$ cm.

6. Punctul E este egal depărtat de laturile rombului $ABCD$ şi nu aparține planului suport al rombului. Să se demonstreze că:
a) proiecția punctului E pe planul rombului coincide cu punctul de intersecție a diagonalelor rombului;
b) cele patru unghiuri diedre formate de planele EAB, EBC, ECD, EDA cu planul α sînt congruente.

7. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi punctul E, astfel încît cele patru unghiuri diedre formate de planele EAB, EBC, ECD, EDA cu planul patrulaterului sînt congruente. Să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil şi că proiecția punctului E pe planul patrulaterului $ABCD$ este egal depărtată de laturile lui.

8. Triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) şi triunghiul echilateral ADE se află în plane diferite şi au o mediană comună, AF. Să se demonstreze că dreapta AF este perpendiculară pe planul determinat de punctele F, B, D.

9. Prin una dintre catetele triunghiului dreptunghic isoscel s-a construit un plan care formează cu cealaltă catetă un unghi de 45°. Să se afle măsura unghiului format de ipotenuză şi acest plan.

10. În trapezul $ABCD$, $m(\angle BAD) = 60°$. Prin baza mare AB este dus un plan care formează cu latura AD un unghi de 45°. Să se afle raportul dintre aria trapezului şi aria proiecției lui pe acest plan.

Probleme recapitulative

A

1. Dreptele AB, AC şi AD sînt perpendiculare. Să se afle lungimea segmentului CD, ştiind că:
a) $AB = 6$ cm, $BC = 14$ cm, $AD = 3$ cm;
b) $BD = 18$ cm, $BC = 32$ cm, $AD = 10$ cm;
c) $AB = m$, $BC = n$, $AD = p$;
d) $BD = s$, $BC = n$, $AD = p$.

2. Distanța de la punctul M la vîrfurile unui triunghi echilateral este b. Să se afle distanța de la punctul M la planul triunghiului, dacă latura triunghiului are lungimea a, iar $b > \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

3. Din vîrful B al trapezului isoscel $ABCD$ ($AD \parallel BC$) pe planul acestuia este construită perpendiculara BE cu lungimea de 4 cm. Să se determine distanțele d_1 şi d_2 de la punctul E la dreptele CD şi respectiv AD, ştiind că înălțimea trapezului este de 4 cm, $BC = 4$ cm şi $AD = 12$ cm.

4. Din vîrful A al hexagonului regulat $ABCDEF$ pe planul acestuia este construită perpendiculara AM, astfel încît $AM = AB$. Să se afle măsura unghiurilor formate de planele:
a) MDC şi AEF
b) DCM şi DEM.

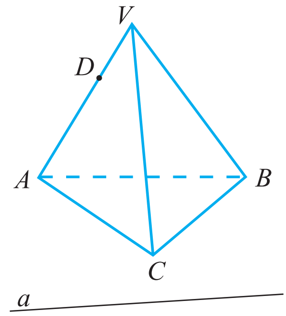
5. Punctul D este egal depărtat de laturile triunghiului ABC. Ştiind că $AB = AC = 6$ cm, $BC = 4$ cm şi că distanța de la punctul D la planul triunghiului este de $\sqrt{2}$ cm, să se afle distanțele de la punctul D la laturile triunghiului.

6. Un cablu trebuie întins de la un stîlp cu înălțimea de 8 m pe acoperişul unei clădiri cu înălțimea de 20 m. Distanța dintre stîlp şi clădire este de 9 m. Să se determine lungimea cablului.

B

7. Se ştie că punctul M, care nu aparţine planului unui poligon, este egal depărtat de laturile poligonului. Să se demonstreze că acest poligon este circumscris unui cerc.

8. Punctul M este egal depărtat de laturile poligonului $ABCDE$. Să se arate că unghiurile diedre formate de planele AMB, BMC, CMD, DME, EMA cu planul ABC au aceeaşi măsură.



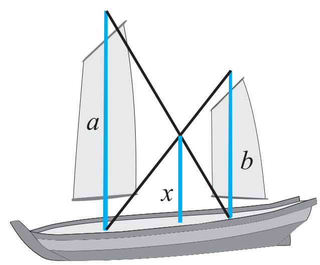
9. Planul α intersectează muchia AV a piramidei $VABC$ în punctul D, iar planul determinat de fața ABC intersectează planul α după dreapta a. Să se construiască secțiunea piramidei date cu planul α.

10. Dreapta a intersectează planul α, iar P este un punct situat în acest plan. Există în planul α o dreaptă ce trece prin P şi care este perpendiculară pe dreapta a?

11. Să se demonstreze că diagonala unui cub este perpendiculară pe planul ce conține extremitățile a trei muchii ce pornesc din acelaşi vîrf al cubului ca şi diagonala respectivă.

12. Prin vîrful unghiului ascuțit al unui triunghi dreptunghic este construit un plan α paralel cu o catetă a acestui triunghi. Catetele sînt de 30 cm şi 40 cm, iar proiecția catetei mai mari pe planul α este de $2\sqrt{31}$ cm. Să se afle lungimea proiecției ipotenuzei pe planul α.

13. Două catarge ale unui iaht sînt unite cu funii, astfel încît fiecare vîrf al unui catarg este unit cu baza celuilalt catarg. La ce distanță de la puntea iahtului se află punctul de intersecție a funiilor, dacă înălțimile catargelor sînt a şi b?



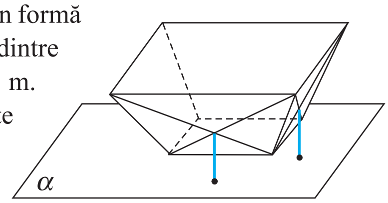
14. Punctul M este egal depărtat de vîrfurile unui hexagon regulat cu latura de lungime a. Să se determine distanța de la punctul M la planul hexagonului, dacă distanța de la punctul M la un vîrf al hexagonului este b.

15. Punctul C nu aparține planului unghiului drept AOB şi este egal depărtat de laturile unghiului. Să se afle distanța de la punctul C la planul unghiului, ştiind că $CO = a$, iar distanța de la punctul C la o latură a unghiului este b.

16. Din punctul A pe un plan sînt construite două oblice congruente. Măsura unghiului format de oblice este 2α, iar măsura unghiului format de proiecțiile oblicelor pe plan este 2β. Să se afle distanța de la punctul A la plan, ştiind că lungimea unei oblice este b.

17. Dintr-un punct situat la distanța a de la un plan sînt construite două oblice pe acest plan de aceeaşi lungime. Măsura unghiului format de oblice este 2α, iar măsura unghiului format de fiecare oblică şi perpendiculara pe plan este β. Să se afle distanța dintre extremitățile oblicelor din planul dat.

18. Coşul de recepție a grăunțelor la o moară are patru pereți în formă de trapeze isoscele cu bazele de 0,4 m şi 1,2 m. Distanța dintre planul orificiului de sus şi planul bazei coşului este de 2 m. Pentru a mări rigiditatea pereților coşului, au fost sudate bare de fier de-a lungul diagonalelor fiecărei fețe şi piloni verticali din punctul de intersecție a acestor bare pînă la planul bazei coşului. Să se determine înălțimea pilonilor.



Probă de evaluare

A

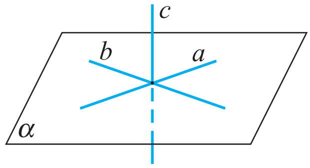
Timp efectiv de lucru: 45 de minute

1. Determinați distanța de la mijlocul segmentului AB la un plan ce nu intersectează acest segment, dacă distanțele de la punctele A şi B la plan sînt de 2,4 cm şi respectiv 4,6 cm. ②
2. Lungimea laturii unui triunghi echilateral este de 6 cm. Un punct, care nu este conținut de planul triunghiului, se află la distanța de 3 cm de fiecare latură a triunghiului. Aflați distanța de la acest punct la planul triunghiului dat. ②
3. Punctul M este situat la distanțe egale de la vîrfurile unui dreptunghi cu dimensiunile de 4 cm şi 10 cm. Determinați distanța de la punctul M la dreptele suport ale laturilor dreptunghiului, dacă distanța de la punctul M la planul dreptunghiului este de 5 cm. ③
4. Latura triunghiului echilateral ABC este de 12 cm. Dreptele MA, MB, MC formează cu planul triunghiului ABC unghiuri congruente de 30°. Aflați distanța de la punctul M la planul triunghiului ABC. ③

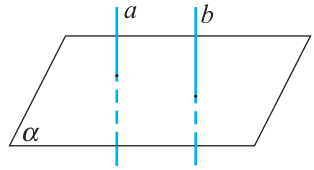
B

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

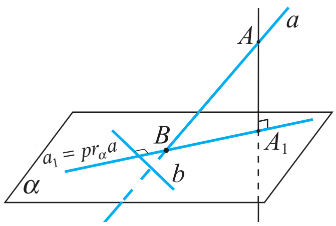
1. Un segment intersectează un plan. Extremitățile segmentului sînt situate la distanțele a şi b de la plan. Aflați distanța de la mijlocul segmentului la acest plan. ②
2. Prin mediana unui triunghi este construit un plan. Demonstrați că vîrfurile triunghiului, ce nu aparțin planului construit, sînt egal depărtate de acest plan. ②
3. Lungimile laturilor unui triunghi isoscel ABC sînt de 5 cm, 5 cm şi 2 cm. Distanța de la punctul M la planul ABC este de 8 cm, iar proiecția lui pe planul ABC coincide cu mijlocul celei mai mari înălțimi a triunghiului. Determinați distanța de la punctul M la laturile triunghiului. ③
4. Aflați măsura unghiului format de muchia laterală şi planul bazei unei piramide patrulatere, dacă se ştie că toate muchiile ei sînt congruente. ③



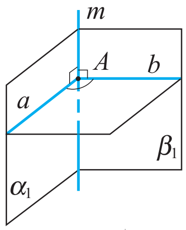
$(a\subset\alpha,\ \ b\subset\alpha,\ \ \alpha\nparallel b,\ \ c\perp a,\ \ c\perp b)\Rightarrow c\perp\alpha$



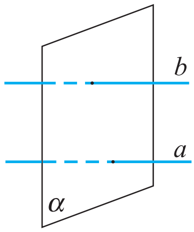
$(a\parallel b,\ \ a\perp\alpha)\Rightarrow b\perp\alpha$



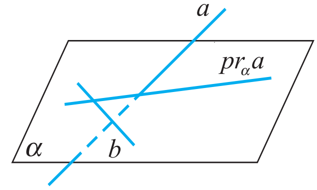
$(a\perp\alpha,\ AB$ – oblică,
$B\in\alpha,\ A_1\in\alpha,\ A_1B\perp b)\Rightarrow AB\perp\alpha$



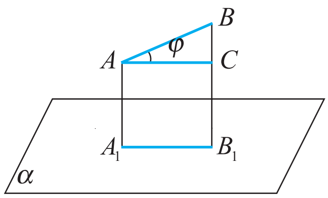
$\angle(\alpha_1\beta_1)$ – unghi diedru, $\alpha\cap\beta=m$,
$(ABC)\perp m$, $m(\angle(\alpha_1\beta_1))=m(\angle BAC)$



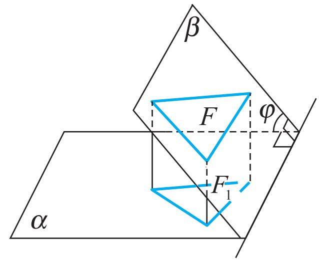
$(a\perp\alpha,\ \ b\perp\alpha)\Rightarrow a\parallel b$



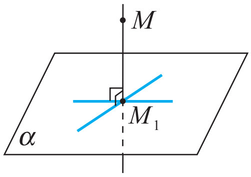
$b\subset\alpha$ 1) $a\perp b\Rightarrow pr_\alpha a\perp b$
2) $b\perp pr_\alpha a\Rightarrow a\perp b$



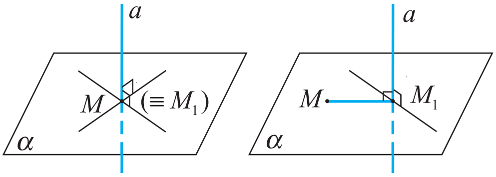
$([A_1B_1]\equiv pr_\alpha[AB],\ \ AC\parallel A_1B_1)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ lungimea proiecției $[AB]$ este $AB\cos\varphi$



$(F\subset\beta,\ F_1=pr_\alpha F,\ m(\angle(\alpha\beta))=\varphi)\Rightarrow$
$\Rightarrow\mathcal{A}_{F_1}=\mathcal{A}_F\cos\varphi$



$(MM_1\perp\alpha,\ \ M_1\in\alpha)\Rightarrow$ lungimea MM_1 este egală cu distanța de la punctul M la planul α



$a\perp\alpha,\ M,\ M_1\in\alpha,\ M_1\in a,\ MM_1$ – distanța de la punctul M la dreapta a

Modulul

10

Transformări geometrice

Obiective

- recunoaşterea în situaţii variate şi utilizarea în diferite contexte a noţiunilor: *simetrie axială*, *simetrie centrală*, *simetrie faţă de un plan*, **translaţie*, **asemănare*, **rotaţie în spaţiu*;
- utilizarea terminologiei aferente transformărilor geometrice în diverse contexte;
- construirea imaginilor unor figuri obţinute în urma transformărilor geometrice studiate;
- utilizarea transformărilor geometrice în rezolvări de probleme.

În clasele anterioare s-au studiat simetria axială, simetria centrală, translaţia, asemănarea în plan. De asemenea, a fost definită congruenţa triunghiurilor. Congruenţa figurilor mai complicate se defineşte cu ajutorul transformărilor geometrice, care au o aplicaţie largă. De exemplu, pentru a elabora un program ce permite vizualizarea pe ecranul calculatorului a unei figuri spaţiale în mişcare, sînt necesare transformările geometrice.

§1 Noţiunea de transformare geometrică. Transformări izometrice

Fie X şi Y mulţimi nevide de puncte din spaţiu. Amintim că dacă fiecărui punct x al mulţimii X i se asociază un singur punct y al mulţimii Y, atunci este definită o ***aplicaţie*** a mulţimii X în mulţimea Y. Se notează: $f\colon X \to Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$. Punctul $y = f(x)$ se numeşte ***imaginea*** punctului $x \in X$, iar x este o ***preimagine*** a punctului $y \in Y$. Se mai spune că punctul x se aplică pe punctul y la aplicaţia f.

Exemple

1. Fie α un plan şi d o dreaptă ce intersectează acest plan. Prin orice punct M al spaţiului trece o singură dreaptă paralelă cu dreapta d. Fie M' punctul de intersecţie a acestei drepte cu planul α (fig. 10.1).

Aplicaţia spaţiului în planul α, care îi asociază fiecărui punct M al spaţiului un punct $M' \in \alpha$, astfel încît $MM' \parallel d$, se numeşte ***proiectare paralelă*** a spaţiului pe planul α în direcţia dreptei d.

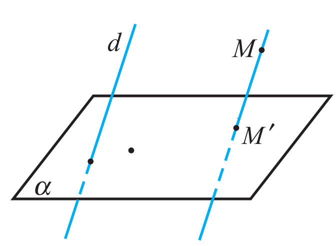


Fig. 10.1

2. Fie O un punct din spaţiu. Aplicaţia spaţiului în el însuşi, care îi asociază fiecărui punct M diferit de O un punct M', astfel încît punctul O este mijlocul segmentului MM', iar punctului O – însuşi punctul O, se numeşte ***simetrie centrală*** de centru O a spaţiului (fig. 10.2).

Se notează: S_O.

Punctul O se numeşte în acest caz ***centru de simetrie***.

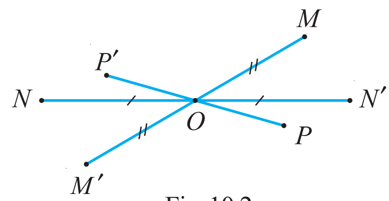


Fig. 10.2

Evident, dacă la simetria centrală, punctul M' este imaginea punctului M, atunci punctul M este imaginea punctului M'; se spune că M şi M' sînt ***simetrice*** faţă de centrul de simetrie.

Observăm că proiectarea paralelă a spaţiului pe un plan nu este o aplicaţie bijectivă (deoarece orice punct din plan posedă mai multe preimagini), iar simetria centrală este o aplicaţie bijectivă a spaţiului.

Definiţie. Orice aplicaţie bijectivă a spaţiului în el însuşi se numeşte **transformare geometrică** a spaţiului.

În continuare, pentru a ne exprima mai laconic, vom folosi cuvîntul „transformare” în loc de „transformare geometrică”.

Fie F o figură din spaţiu şi g o transformare a spaţiului. Figura $F' = g(F)$, ce constă din imaginile tuturor punctelor figurii F la transformarea g, se numeşte ***imagine*** a figurii F la transformarea g.

Deoarece transformările sînt un caz particular al aplicaţiilor, ele posedă toate proprietăţile generale ale aplicaţiilor. Astfel, compunerea transformărilor este o transformare; are loc legea asociativă a compunerii transformărilor, se poate defini restricţia transformării la o figură etc.

Dacă prin transformarea g figura F se aplică pe ea însăşi, adică $g(F) = F$, atunci restricţia transformării g la figura F se numeşte ***transformare de simetrie*** a figurii F. Pentru concizie, vom spune că g este transformare de simetrie a figurii F.

Definiţie. Transformarea g a spaţiului se numeşte **transformare de izometrie** (sau **izometrie**) a spaţiului dacă pentru orice două puncte M şi N ale spaţiului şi imaginile lor $M' = g(M)$, $N' = g(N)$ are loc egalitatea $MN = M'N'$.

Altfel spus, izometria este aplicaţia spaţiului în el însuşi care păstrează distanţele. Izometriile se mai numesc şi ***deplasări*** sau ***mişcări*** ale spaţiului.

Evident, transformarea identică a spaţiului, adică transformarea care aplică fiecare punct al spaţiului pe el însuşi, este o izometrie.

Două figuri se numesc ***congruente*** dacă există o izometrie care aplică una dintre aceste figuri pe cealaltă.

Teorema 1. Orice izometrie aplică trei puncte coliniare pe trei puncte coliniare. De asemenea, izometria aplică un punct situat între alte două puncte pe un punct situat între imaginile acestor două puncte.

Demonstraţie

Fie A, B, C puncte coliniare distincte. Atunci unul şi numai unul dintre ele este situat între celelalte două. Fie B situat între A şi C. Astfel, are loc egalitatea $AB + BC = AC$.

Fie A', B', C' imaginile respective ale punctelor A, B, C la o izometrie. Din definiția izometriei rezultă egalitățile $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, iar din ele rezultă egalitatea $A'B' + B'C' = A'C'$. Adică B' este situat între A' şi C', iar aceasta înseamnă că punctele A', B', C' sînt coliniare. ▶

Definiție. Punctul A se numeşte **punct invariant** al izometriei g dacă $g(A) = A$; dreapta d se numeşte **dreaptă invariantă** a lui g dacă $g(d) = d$; planul α se numeşte **plan invariant** al lui g dacă $g(\alpha) = \alpha$.

Dacă toate punctele unei drepte sînt puncte invariante ale izometriei g, atunci această dreaptă se numeşte ***invariantă punct cu punct*** la această izometrie.

Problemă rezolvată

Să se arate că dacă o izometrie nu are puncte invariante, atunci dreptele invariante ale acestei izometrii (în cazul în care există) sînt paralele.

Rezolvare:

Presupunem contrariul, fie a şi b drepte invariante neparalele la izometria dată g. Deci, aceste drepte se intersectează sau sînt necoplanare. Dacă dreptele a şi b se intersectează în punctul M, atunci punctul $M' = g(M)$ aparține acestor drepte (invariante), adică $g(M) = M$. Aceasta contrazice ipoteza problemei. În cazul în care dreptele a şi b sînt necoplanare, există perpendiculara lor comună AB, $A \in a$, $B \in b$. Deoarece AB este cea mai mică distanță dintre dreptele a şi b, rezultă că punctele A şi B sînt puncte invariante la izometria g şi iarăşi obținem o contradicție.

Probleme propuse

A

1. Să se dea exemple de transformări geometrice în spațiu din diverse domenii.
2. Să se decidă dacă proiectarea paralelă a spațiului pe un plan este o izometrie.
3. Fie unghiul AOB şi f o aplicație a spațiului în el însuşi, astfel încît au loc următoarele două condiții:

   a) imaginea oricărui punct M al spațiului, ce nu aparține unghiului AOB, este însuşi acest punct M;

   b) imaginea oricărui punct ce aparține unghiului AOB este simetricul lui față de bisectoarea acestui unghi.

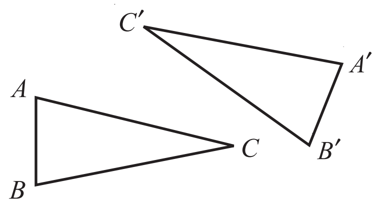
   Este această aplicație o transformare geometrică a spațiului? Dar o izometrie?
4. În urma unei transformări geometrice a spațiului, o figură se aplică pe ea însăşi. Este oare o astfel de transformare o izometrie a spațiului? Să se dea exemple.

B

5. Să se demonstreze că orice izometrie aplică:

   a) un segment pe un segment congruent cu el; b) un triunghi pe un triunghi congruent cu el.
6. Să se demonstreze că orice izometrie aplică un unghi pe un unghi congruent cu el.
7. Să se demonstreze că aplicația inversă izometriei este de asemenea o izometrie.

8. Fie $\Delta A'B'C'$ imaginea triunghiului ABC la izometria g.
Să se construiască imaginea:
a) medianei BK; b) bisectoarei BL;
c) înălţimii BM; d) centrului de greutate G;
e) centrului cercului înscris I; f) ortocentrului H;
g) centrului O al cercului circumscris triunghiului ABC la această izometrie.



9. a) Să se arate că dacă A şi B sînt puncte invariante distincte ale izometriei f, atunci orice punct al dreptei AB este invariant.
b) Poate oare izometria spaţiului să posede exact două puncte invariante distincte?

10. a) Să se arate că dacă A, B, C sînt puncte necoliniare invariante ale izometriei f, atunci orice punct al planului ABC este invariant.
b) Să se decidă dacă izometria spaţiului posedă exact trei puncte invariante.

11. Izometria f are un punct invariant.
a) Are oare un punct invariant izometria f^{-1}? b) Dar izometria $f \circ f$?

12. Izometria f posedă următoarea proprietate: pentru un punct A, $f(A) = B$, iar $f(B) = A$. Să se decidă dacă izometria $f \circ f$ are puncte invariante.

§2 Simetria centrală

În § 1 am definit simetria spaţiului faţă de un punct şi am numit-o simetrie centrală.

Teorema 2. Simetria centrală a spaţiului este o izometrie.

Demonstraţie

Presupunem că simetria centrală S_O aplică punctele arbitrare M şi N ale spaţiului pe punctele M' şi respectiv N'.

Dacă punctele M, N şi O sînt necoliniare (fig. 10.3 a)), afirmaţia teoremei rezultă din congruenţa triunghiurilor MON şi $M'ON'$ (criteriul LUL), deci $MN = M'N'$.

Dacă punctele M, N şi O sînt coliniare şi, de exemplu, M este situat între O şi N (fig. 10.3 b)), atunci

$$MN = ON - OM = ON' - OM' = M'N'.$$

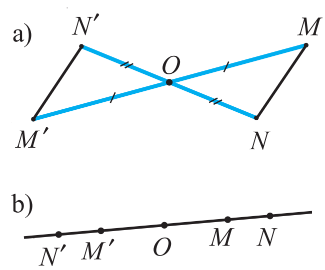


Fig. 10.3

Analog se obţine egalitatea $MN = M'N'$ şi în celelalte cazuri de amplasare a punctelor M, N şi O pe aceeaşi dreaptă. Aşadar, simetria centrală păstrează distanţele dintre puncte, prin urmare, este o izometrie. ▶

Definiţie. Figurile F şi F' se numesc **simetrice** faţă de punctul O dacă $S_O(F) = F'$.

În particular, dacă figura F este simetrică cu ea însăşi faţă de punctul O, atunci F se numeşte ***figură central simetrică***, iar O se numeşte ***centru de simetrie al figurii*** F. De exemplu, cercul, pătratul, sfera sînt figuri central simetrice.

Problemă rezolvată

Punctul A este situat în interiorul unghiului BOC (fig. 10.4). Să se construiască segmentul cu extremitățile pe laturile acestui unghi, astfel încît mijlocul lui să fie punctul A.

Rezolvare:

Prin punctul $O' = S_A(O)$ ducem dreptele $O'C'$ şi $O'B'$ paralele cu OC şi respectiv OB. Segmentul DE, unde $D = O'C' \cap OB$ şi $E = O'B' \cap OC$, este segmentul care trebuie construit.

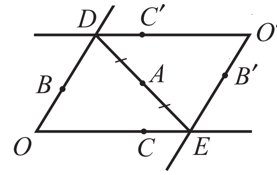


Fig. 10.4

Probleme propuse

A

1. Să se dea exemple de figuri geometrice central simetrice.

2. Să se stabilească dacă sînt simetrice orice două puncte ale spațiului față de un al treilea punct al spațiului.

3. Cîte centre de simetrie are figura formată din două drepte paralele? Ce figură reprezintă mulțimea acestor centre?

4. Să se decidă dacă sînt simetrice față de un punct două segmente necongruente.

5. Pot oare să fie simetrice față de un punct două segmente concurente? Dar neconcurente?

6. Punctele A, B, C, D sînt situate în spațiu, astfel încît A şi C sînt simetrice față de B, iar B şi D sînt simetrice față de C. Ce se mai poate spune despre amplasarea acestor puncte?

7. Să se construiască simetricul unui triunghi față de:
a) un vîrf al triunghiului; b) mijlocul unei laturi a triunghiului.

8. Să se decidă dacă există puncte, drepte şi plane invariante la o simetrie centrală.

9. Ce aplicație reprezintă compunerea $S_O \circ S_O$?

10. Poate fi un triunghi figură central simetrică?

B

11. Să se demonstreze că aplicația inversă unei simetrii centrale este aceeaşi simetrie centrală.

12. Să se demonstreze că simetria centrală aplică:
a) orice plan pe un plan paralel cu el;
b) orice două plane paralele pe două plane paralele;
c) două plane ce se intersectează după o dreaptă pe două plane ce se intersectează după imaginea dreptei respective;
d) două plane perpendiculare pe două plane perpendiculare.

13. Fie punctul A şi figura F, $A \notin F$. Se consideră mulțimea tuturor punctelor spațiului simetrice punctului A față de toate punctele figurii F. Să se determine această mulțime, dacă figura F este:
a) un segment; b) o dreaptă; c) un plan.

14. Să se arate că, la o simetrie centrală, orice dreaptă şi imaginea ei sînt coplanare.

15. Să se arate că dacă figura $F = [AB] \cup [CD]$ este central simetrică, atunci şi figura $[AC] \cup [BD]$ este central simetrică față de acelaşi centru.

§3 Simetria axială

Fie dreapta d şi punctul $A \notin d$. Punctul A' se numeşte ***simetricul*** punctului A faţă de dreapta d dacă $AA' \perp d$, $AA' \cap d = M$ şi $AM = A'M$. Punctele dreptei d se numesc simetrice cu ele însele faţă de această dreaptă.

Definiţie. Transformarea spaţiului care aplică fiecare punct al spaţiului pe simetricul său faţă de dreapta dată d se numeşte **simetrie a spaţiului faţă de dreapta *d*** sau **simetrie axială de axă *d***.

Se notează: S_d, $S_d(A) = A'$, $S_d(B) = B'$ (fig. 10.5).

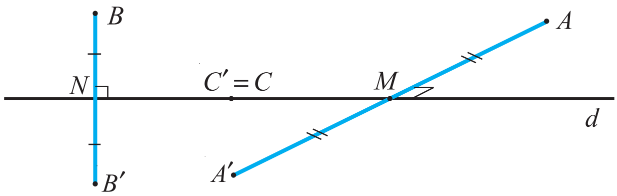


Fig. 10.5

Teorema 3. Simetria axială a spaţiului este o izometrie.

Demonstraţie

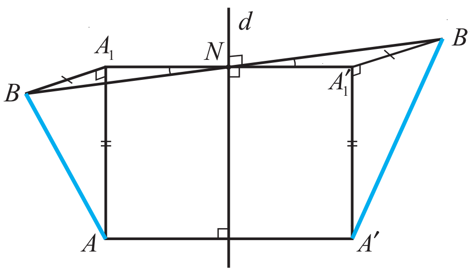


Fig. 10.6

Presupunem că simetria axială de axă d aplică punctele arbitrare A şi B pe punctele A' şi respectiv B'. Să demonstrăm că $AB = AB'$. Dacă dreptele AB şi d sînt coplanare, atunci este evident că $AB = A'B'$. Presupunem că dreptele AB şi d sînt necoplanare (fig. 10.6) şi $BB' \cap d = N$. Ducem prin punctul N dreapta paralelă cu AA' şi construim pe ea segmentele simetrice A_1N şi NA_1', astfel încît $A_1A_1' = AA'$. Patrulaterul $AA_1A_1'A'$ este dreptunghi şi, prin urmare, $AA_1 = A'A_1'$. Cum axa d este perpendiculară pe dreptele BB' şi A_1A_1', ea este perpendiculară şi pe planul determinat de aceste drepte. De aici şi din faptul că $AA_1 \parallel d \parallel A'A_1'$ rezultă că $AA_1 \perp A_1B$ şi $A'A_1' \perp A_1'B'$. Din congruenţa triunghiurilor A_1NB şi $A_1'NB'$ rezultă că $BA_1 = B'A_1'$. Avînd catetele congruente, rezultă că triunghiurile dreptunghice AA_1B şi $A'A_1'B'$ sînt congruente şi deci $AB = A'B'$. ►

Dacă la simetria axială S_d, figura F' este imaginea figurii date F, adică $F' = S_d(F)$, atunci aceste figuri se numesc ***simetrice faţă de dreapta d***.

Dreapta d este o axă de simetrie a figurii F, dacă simetria axială de axă d aplică această figură pe ea însăşi: $S_d(F) = F$. De exemplu, dreptele ce conţin diagonalele şi mediatoarele laturilor pătratului sînt axe de simetrie ale acestuia; orice dreaptă ce trece prin centrul cercului şi aparţine planului cercului sau este perpendiculară pe el este o axă de simetrie a cercului.

Problemă rezolvată

Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC cu $m(\angle A) < 90°$ sînt date punctele fixe P şi respectiv Q (fig. 10.7). Să se determine pe latura BC punctul X_1, astfel încît perimetrul ΔPQX să fie minim.

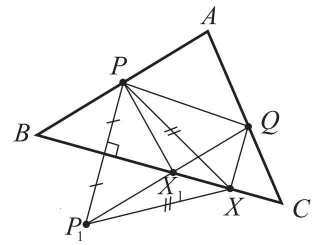


Fig. 10.7

Rezolvare:

Fie $P_1 = S_{BC}(P)$, atunci $P_1X = PX$, $\forall X \in (BC)$.

Perimetrul ΔPQX este minim dacă suma $P_1X + XQ$ este minimă; deci $X = X_1 = BC \cap P_1Q$.

Probleme propuse

A

1. Să se dea exemple de figuri geometrice care:
a) au cel puțin o axă de simetrie; b) nu au axă de simetrie.

2. Să se determine axele de simetrie ale cubului.

3. Să se construiască imaginea unui cub la simetria axială față de:
a) dreapta suport a unei muchii a cubului;
b) dreapta suport a diagonalei unei fețe.

4. Să se determine poziția reciprocă a axei de simetrie d şi a imaginii α' a planului dat α la simetria S_d, dacă: a) $\alpha \supset d$; b) $d \perp \alpha$; c) d este oblică față de α.

5. Fie punctele distincte A şi B. Să se indice axele tuturor simetriilor axiale care aplică A pe B. Ce figură este reuniunea tuturor acestor axe?

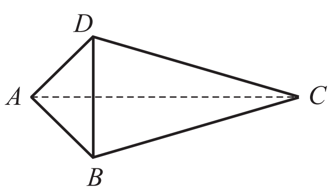
6. Să se indice toate axele de simetrie ale:
a) unui segment; b) unei semidrepte; c) unei drepte;
d) unui plan; e) unui paralelogram.

B

7. Să se determine care poate fi poziția reciprocă la simetria axială:
a) a unei drepte şi a imaginii ei;
b) a unui plan şi a imaginii lui.

8. Să se determine:
a) dreptele invariante ale simetriei S_d;
b) dreptele invariante punct cu punct ale simetriei S_d.

9. Să se construiască imaginea figurii reprezentate la simetria față de dreapta AB, dacă punctele A, B, C, D sînt necoplanare, ABC şi ABD sînt triunghiuri isoscele cu baza comună AB.



§4 Simetria față de un plan

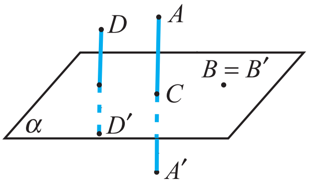


Fig. 10.8

Fie planul α şi punctele A, A' ce nu aparțin acestui plan. Punctele A şi A' se numesc ***simetrice față de planul*** α dacă acest plan este ***planul mediator*** al segmentului AA', adică planul α este perpendicular pe segmentul AA' şi îl împarte în jumătate. Orice punct B al planului α se consideră simetric cu el însuşi (fig. 10.8).

Definiție. Transformarea spațiului care aplică orice punct al spațiului pe simetricul lui față de un plan dat α se numeşte **simetrie a spațiului față de planul α**.

Se notează: S_α.

Planul α se numeşte ***plan de simetrie***.

Dacă pentru figura F are loc relația $F = S_\alpha(F)$, planul α se numeşte ***plan de simetrie al figurii F***, iar figura F se numeşte ***figură simetrică față de planul α***.

De exemplu, cilindrul circular drept este simetric față de orice plan ce conține axa lui.

Problemă rezolvată

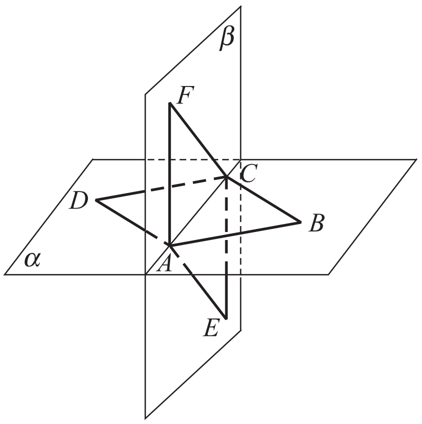


Fig. 10.9

Planele α şi β sînt perpendiculare (fig. 10.9). Patrulaterele $ABCD$ şi $AECF$ sînt romburi. Să se demonstreze că $EBFD$ este romb.

Rezolvare:

Observăm că la simetria S_α, $S_\alpha([FB]) = [BE]$, $S_\alpha([FD]) = [DE]$.

Prin urmare, $[FB] \equiv [BE]$, $[FD] \equiv [DE]$.

În mod analog, la simetria S_β, $S_\beta([FB]) = [FD]$, adică $[FB] \equiv [FD]$.
Astfel, patrulaterul $EBFD$ are toate laturile congruente, adică este romb.

Probleme propuse

A

1. Să se dea exemple de figuri geometrice care au plane de simetrie.
2. Să se determine dreptele care se aplică pe ele înseşi la simetria față de un plan.
3. Să se indice planele de simetrie (dacă ele există) ale:
   a) unui segment; b) unei drepte;
   c) unui plan; d) reuniunii a două drepte concurente;
   e) reuniunii a două drepte paralele; f) reuniunii a două plane paralele.
4. Se ştie că segmentele AB şi $A'B'$ sînt simetrice față de un plan. Sînt oare coplanare sau necoplanare dreptele lor suport?
5. Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cub. Să se reprezinte simetricul punctului A față de planul:
   a) CC_1D_1; b) BDD_1; c) CDA_1; d) BDC_1; e) BCB_1.

6. Două plane reciproc perpendiculare se intersectează după dreapta d. Punctele A şi B sînt simetricele punctului C faţă de aceste plane. Să se afle distanţa de la punctul C pînă la dreapta d, dacă $AB = 10$ m.

7. Planul α este simetricul planului β faţă de planul γ. Care poate fi poziţia reciprocă a planelor α şi β?

B

8. Să se demonstreze că simetria spaţiului faţă de un plan α:
a) este o izometrie;
b) coincide cu inversa sa, adică $S_\alpha = S_\alpha^{-1}$;
c) aplică orice dreaptă pe o dreaptă şi orice plan pe un plan.

9. Punctele A şi B sînt situate de aceeaşi parte a planului α. Să se găsească în planul α un punct M, astfel încît suma $AM + MB$ să fie minimă.

10. Punctele A şi B sînt situate de părţi diferite ale planului α, la distanţe diferite de planul α. Să se afle în planul α un punct M, astfel încît valoarea absolută a diferenţei $AM - MB$ să fie maximă.

11. Prin dreapta d sînt duse toate planele posibile. Se consideră un punct A ce nu aparţine dreptei d şi mulţimea tuturor simetricelor punctului A faţă de aceste plane. Ce reprezintă această mulţime?

12. Să se demonstreze: compunerea a trei simetrii în raport cu trei plane reciproc perpendiculare este o simetrie centrală.

§5 Translaţia

Două semidrepte cu aceeaşi dreaptă suport se numesc ***semidrepte la fel orientate*** (sau ***coorientate***), dacă intersecţia lor este o semidreaptă, respectiv ***semidrepte opus orientate***, dacă intersecţia lor nu este o semidreaptă.

Semidreptele [AC şi [BC din figura 10.10 sînt la fel orientate, iar semidreptele [BA şi [AC – opus orientate. Se notează: $[AC \uparrow\uparrow [BC$, $[BA \uparrow\downarrow [AC$.

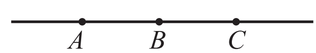
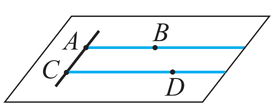


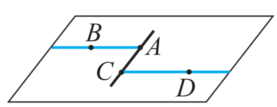
Fig. 10.10

Dacă dreptele suport a două semidrepte sînt drepte paralele distincte, atunci ele aparţin unui plan. Dreapta ce trece prin originile acestor semidrepte împarte planul în două semiplane. Dacă aceste semidrepte sînt situate în acelaşi semiplan, atunci ele se numesc ***semidrepte la fel orientate*** (fig. 10.11 a)), iar dacă sînt situate în semiplane diferite – ***semidrepte opus orientate*** (fig. 10.11 b)).



$[AB \uparrow\uparrow [CD$

a)



$[AB \uparrow\downarrow [CD$

b)

Fig. 10.11

Evident, două semidrepte la fel orientate cu a treia sînt la fel orientate.

Definiție. Se numeşte **translație a spațiului determinată de perechea ordonată de puncte distincte** (A, A') transformarea spațiului care aplică fiecare punct M al spațiului pe punctul M', astfel încît $[MM' \uparrow\uparrow [AA'$ şi $MM' = AA'$ (fig. 10.12).

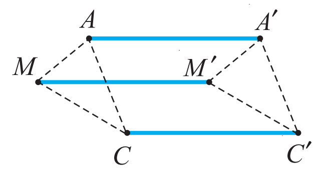


Fig. 10.12

Pentru translația determinată de perechea (A, A') se foloseşte notația $t_{AA'}$. Deci, $M' = t_{AA'}(M)$, $C' = t_{AA'}(C)$ etc.

Evident, dacă $t_{AA'}(M) = M'$, atunci $t_{MM'}(A) = A'$ şi, în acest caz, $t_{AA'} = t_{MM'}$. Aceasta înseamnă că translația poate fi determinată de orice pereche de puncte, unul dintre care este imaginea celuilalt la această translație.

Transformarea identică a spațiului este considerată drept o translație determinată de orice pereche de puncte ce coincid: $t_{AA}(M) = t_{BB}(M) = M$, $\forall M$ şi $\forall A, B$.

Dacă $M' = t_{AA'}(M)$ şi $M \notin AA'$, atunci patrulaterul $AA'M'M$ este paralelogram.

Problemă rezolvată

Două sate, A şi B, sînt despărțite de un rîu ale cărui maluri au forma a două drepte paralele. Unde trebuie să fie construit podul peste rîu, astfel încît lungimea drumului dintre aceste sate să fie minimă (podul se construieşte perpendicular pe maluri)?

Rezolvare:

Fie vectorul $\overline{a}$ perpendicular pe malurile rîului şi modulul lui este egal cu distanța dintre maluri (fig. 10.13). Dacă $B_1 = t_{\overline{a}}(B)$, atunci punctul M, din care se va construi podul, este situat pe malul pe care se află satul A şi pe segmentul AB_1. Pentru orice alt punct $M_1 \neq M$, $AM_1 + M_1B_1 > AM + MB_1 = AB_1 = AM + NB$.

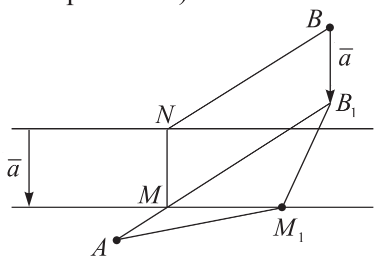


Fig. 10.13

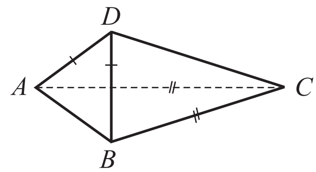
Probleme propuse

B

1. Să se construiască imaginea paralelogramului $ABCD$ la translația t_{AM}, dacă punctul M coincide cu:
   a) vîrful B; b) vîrful C; c) vîrful D; d) intersecția diagonalelor.

2. Să se construiască imaginea cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ la translația t_{AM}, dacă punctul M coincide cu:
   a) vîrful B; b) vîrful B_1; c) vîrful C_1; d) mijlocul muchiei AB; e) centrul O al cubului.

3. Trei drepte paralele distincte intersectează două plane paralele distincte în vîrfurile triunghiurilor ABC şi respectiv $A_1B_1C_1$. Să se arate că aceste triunghiuri sînt congruente.



4. Punctele A, B, C, D sînt necoplanare, astfel încît triunghiurile ABD şi ABC sînt isoscele cu aceeaşi bază AB. Să se construiască imaginea figurii $ABCD$ la translaţia t_{AC}.
5. Să se decidă dacă există puncte, drepte şi plane invariante la o translaţie diferită de cea identică.
6. Să se determine translaţia inversă pentru t_{AB}.
7. Să se demonstreze că:
   a) translaţia este o izometrie a spaţiului;
   b) translaţia aplică orice dreaptă pe o dreaptă paralelă cu ea, orice semidreaptă pe o semidreaptă coorientată, orice plan pe un plan paralel cu el;
   c) compunerea a două translaţii este o translaţie.
8. Există oare o translaţie care aplică unul dintre cele două plane date pe celălalt, dacă aceste plane: a) se intersectează; b) sînt paralele?
9. Să se arate că dacă laturile unui unghi sînt coorientate cu laturile unui alt unghi, atunci aceste unghiuri sînt congruente.
10. Să se arate că $S_B \circ S_A = t_{AA_1}$, unde $A_1 = S_B(A)$.
11. Să se demonstreze: compunerea a două simetrii faţă de două plane paralele este o translaţie în direcţie perpendiculară pe aceste plane de la primul plan spre al doilea la distanţa egală cu dublul distanţei dintre aceste plane.
12. Să se demonstreze că orice translaţie este compoziţia a două simetrii faţă de plane. Cum se construiesc astfel de plane?
13. Să se demonstreze: compoziţia a două simetrii axiale cu axele paralele este o translaţie. Cum se determină această translaţie?

§6 Transformarea de asemănare. Omotetia

Definiţie. Fie k un număr real pozitiv. Se numeşte **transformare de asemănare de coeficient k** (sau **asemănare de coeficient k**) a spaţiului aplicaţia spaţiului în el însuşi care pentru orice două puncte A, B şi imaginile lor respective A', B' satisface condiţia $A'B' = kAB$.

Observăm că orice izometrie este o asemănare de coeficient $k = 1$.

Din egalitatea $A'B' = kAB$ rezultă că dacă $A \neq B$, atunci $A' \neq B'$, adică asemănarea spaţiului este o aplicaţie bijectivă a spaţiului.

Teoremă. 1) Compunerea a două asemănări de coeficienţi k_1 şi k_2 este o asemănare de coeficient k_1k_2.
2) Transformarea inversă asemănării de coeficient k este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$.

Demonstrație

1) Admitem că punctele arbitrare A, B se aplică, prin asemănarea de coeficient k_1, pe punctele A' şi respectiv B', iar acestea, la rîndul lor, prin asemănarea de coeficient k_2, se aplică pe A'', respectiv B''. Atunci $A'B' = k_1 AB$ şi $A''B'' = k_2 A'B'$. De aici obținem $A''B'' = k_1 \cdot k_2 AB$, adică transformarea care aplică punctele A, B respectiv pe A'', B'' este o asemănare de coeficient $k_1 k_2$.

2) La asemănarea de coeficient k, pentru punctele arbitrare A şi B ale spațiului şi pentru imaginile respective A' şi B' are loc egalitatea $A'B' = kAB$. De aici obținem că $AB = \frac{1}{k}A'B'$, adică transformarea care aplică punctele A', B' pe punctele A şi respectiv B este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$. ►

Două figuri se numesc ***asemenea*** dacă există o transformare de asemănare a spațiului care aplică una dintre aceste figuri pe cealaltă. Congruența figurilor este un caz particular al asemănării $(k = 1)$.

Definiție. Fie O un punct al spațiului şi k un număr real nenul. Se numeşte **omotetie de centru O şi de coeficient k** aplicația spațiului în el însuşi care satisface condițiile:

1. Punctul O se aplică pe el însuşi.
2. Dacă $M \neq O$ şi M' este imaginea lui M, atunci punctele O, M şi M' sînt coliniare. Punctul O este exterior segmentului MM' pentru $k > 0$ şi interior acestui segment pentru $k < 0$.
3. Pentru orice punct M al spațiului şi imaginea sa M' are loc egalitatea $OM' = |k|OM$ (fig. 10.14).

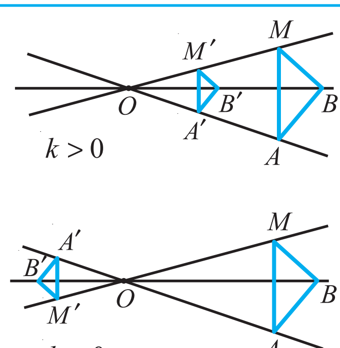


Fig. 10.14

Două figuri se numesc ***figuri omotetice*** dacă există o omotetie a spațiului care aplică una dintre aceste figuri pe cealaltă.

Omotetia este un caz particular al asemănării.

Problemă rezolvată

Fie cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 10.15). Să se construiască o secțiune a cubului cu un plan care este un hexagon regulat.

Rezolvare:

Planul determinat de punctele A_1, D şi B taie trei fețe ale cubului după diagonalele A_1D, DB şi respectiv BA_1. Triunghiul A_1DB este echilateral. Considerăm omotetia de centru A şi coeficient $k = \frac{3}{2}$. La această omotetie, imaginea planului A_1DB este planul $A_2D_2B_2$, care taie cubul după hexagonul regulat $MNPQRS$. Punctele M, N, P, Q, R, S sînt respectiv mijloacele muchiilor DC, CB, BB_1, A_1B_1, A_1D_1, D_1D.

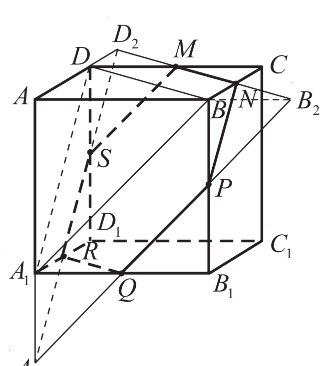


Fig. 10.15

Probleme propuse

B

1. Să se dea exemple de asemănare din diverse domenii.

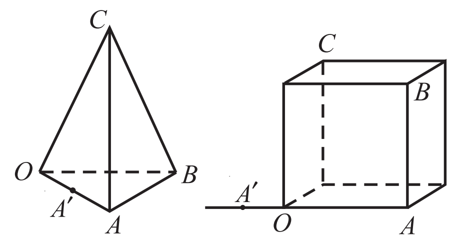
2. Să se decidă dacă o sferă este asemenea cu un cub.

3. Sînt oare asemenea un cub şi fotografia sa?

4. Cîte puncte invariante are o omotetie de coeficient $k \neq 1$? Dar drepte invariante?

5. Lungimea muchiei unui cub este de trei ori mai mare decît lungimea muchiei altui cub. Pentru vopsirea fețelor cubului mai mic s-a folosit o cutie de vopsea. Cîte cutii de vopsea sînt necesare pentru a vopsi cubul mai mare?

6. La omotetia de centru O, punctul A' este imaginea punctului A. Să se găsească imaginile punctelor B şi C (cercetați cazurile a) şi b) din figura alăturată).



a) b)

7. Trei drepte care trec printr-un punct O intersectează planele paralele α şi β în punctele A, B, C şi respectiv A_1, B_1, C_1. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sînt omotetice.

8. Să se demonstreze că, în urma transformării de asemănare, intersecția şi reuniunea a două figuri se aplică respectiv pe intersecția şi reuniunea imaginilor lor.

9. Considerăm o transformare de asemănare. Ce figură reprezintă imaginea:
a) cercului; b) discului; c) paralelogramului;
d) pătratului; e) cubului; f) sferei?

§7 Rotația în jurul unei drepte (rotația axială)

Definiție. Se numeşte **rotație de axă *l* şi unghi de măsură** φ (sau **rotație în jurul dreptei *l* cu un unghi** φ) aplicația spațiului în el însuşi la care fiecare punct al dreptei l se aplică pe el însuşi, iar fiecare punct A ce nu aparține dreptei l se aplică pe punctul A', astfel încît A şi A' aparțin unui plan α perpendicular pe l, $A_0A = A_0A'$ şi $m(\angle AA_0A') = \varphi$, unde $\{A_0\} = \alpha \cap l$.

Se notează: R_l^{φ}.

Se consideră că direcția rotației (în planul α) de la punctul A la punctul A' este aceeaşi pentru toate punctele A dacă privim într-un sens al dreptei l (fig. 10.16).

Dreapta l se numeşte ***axă de rotație***, iar unghiul φ – ***unghi de rotație***.

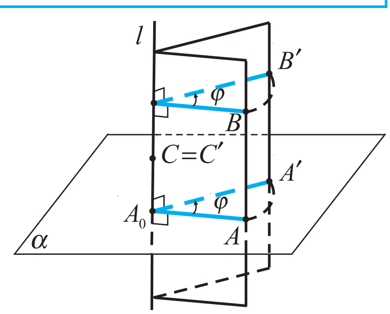


Fig. 10.16

Dacă $R_l^{\varphi}(F) = F$, atunci dreapta l este o axă de rotație a figurii F. Se poate arăta că rotația axială este o izometrie.

Definiție. O figură se numește **figură de rotație** dacă există o dreaptă, astfel încît orice rotație în jurul acestei drepte aplică figura pe ea însăşi. O astfel de dreaptă se numeşte **axă a figurii**.

De exemplu, cercul, discul, sfera, cilindrul, conul sînt figuri de rotație.

Problemă rezolvată

Să se determine cîte axe de rotație are cubul.

Rezolvare:

Fie cubul $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 10.17).

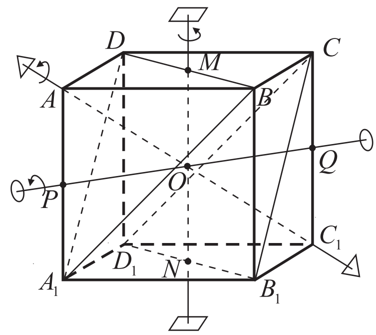


Fig. 10.17

Dacă M este centrul feței $ABCD$ şi N – centrul feței $A_1B_1C_1D_1$, atunci $R_{MN}^{90^\circ}(K) = R_{MN}^{180^\circ}(K) = R_{MN}^{270^\circ}(K) = R_{MN}^{360^\circ}(K) = K$. Deci, MN este axă de rotație a cubului. Cubul mai are două axe de rotație de acest tip.

Dreapta AC_1 este axă de rotație a cubului, unghiurile de rotație fiind de 120°, 240° şi 360°. Astfel de axe mai sînt DB_1, CA_1, DD_1.

Cubul mai are şase axe de rotație cu unghiurile de 180° şi 360°. Acestea sînt dreptele determinate de mijloacele muchiilor opuse ale cubului.

Aşadar, cubul are 13 axe de rotație.

Probleme propuse

B

1. Să se arate că dacă o izometrie are cel puțin două puncte invariante distincte A şi B, dar nu are puncte invariante ce nu aparțin dreptei AB, atunci această izometrie este o rotație de axă AB.
2. Fie A şi B două puncte distincte. Să se indice o rotație axială care aplică punctul A pe punctul B. *Ce figură formează axele tuturor rotațiilor de acest fel?
3. Cîte axe de rotație poate avea:
   a) o sferă;
   b) o sferă fără un punct;
   c) o sferă fără două puncte;
   d) o sferă fără trei puncte.
4. Să se demonstreze că rotația în jurul unei axe este o izometrie.
5. Să se arate că simetria axială este o rotație în jurul unei axe.
6. Să se arate că orice dreaptă a perpendiculară pe axa de rotație se aplică la această rotație pe dreapta a' situată cu dreapta a în acelaşi plan şi că unghiul format de a şi a' este egal cu unghiul de rotație.
7. Fie dreapta l şi punctele distincte A şi B, astfel încît dreptele l şi AB sînt necoplanare. Să se determine pe dreapta l un punct M, astfel încît $AM + MB$ să fie minimă.

Probleme recapitulative

A

1. Fie două drepte d_1, d_2 şi două puncte A, C. Să se determine punctele B, D $(B \in d_1, D \in d_2)$, astfel încît patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram. Discuţii.

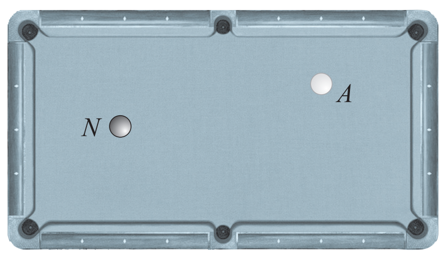
2. Se dau dreapta d, cercul $\mathscr{C}$ şi punctele A, C. Să se determine punctele B şi D $(B \in d, D \in \mathscr{C})$, astfel încît patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram. Discuţii.

3. Să se arate că dacă mediana BM a triunghiului ABC este şi înălţime, atunci ΔABC este isoscel.

4. Cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ au un punct comun M. Să se construiască o dreaptă d ce trece prin punctul M, astfel încît coardele formate de aceste cercuri pe dreapta d să fie congruente.

B

5. Pe latura AB a triunghiului ascuţitunghic ABC este dat un punct fix P, iar pe laturile AC şi BC – punctele mobile X şi respectiv Y. Să se determine punctele X_1 şi Y_1, astfel încît perimetrul triunghiului PX_1Y_1 să fie minim.



6. Pe o masă de biliard sînt două bile: una albă A şi alta neagră N. Să se determine punctele de impact cu bordurile, astfel încît după impact bila albă să lovească bila neagră.

7. Să se afle vîrful C al triunghiului ABC, dacă se dau vîrfurile lui A, B şi dreapta suport d a bisectoarei unghiului C.

8. Fie două drepte concurente d_1 şi d_2 şi un vector $\overline{a}$, care nu este coliniar cu aceste drepte. Să se determine un punct $M_1 \in d_1$ şi un punct $M_2 \in d_2$, astfel încît $\overrightarrow{M_1M_2} = \overline{a}$.

9. Fie dreptele concurente d_1, d_2 şi două puncte distincte A, B ce nu aparţin acestor drepte. Să se construiască paralelogramul ABB_1A_1, astfel încît $A_1 \in d_1$, $B_1 \in d_2$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

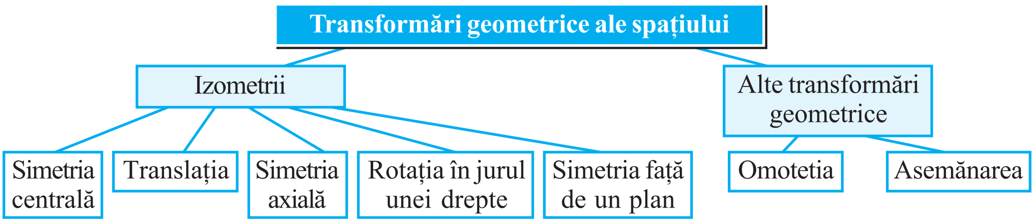
A

1. Indicați planele de simetrie ale figurii formate din reuniunea a două plane secante. ①
2. Indicați axele de simetrie ale figurii formate din reuniunea a două drepte paralele. ①
3. Stabiliți cîte centre, axe şi plane de simetrie are un cub. ②
4. Stabiliți cîte centre, axe şi plane de simetrie are un tetraedru regulat. ③
5. Determinați literele majuscule de tipar ale alfabetului latin care admit centru de simetrie şi literele care admit axe de simetrie. ③

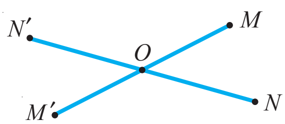
Timp efectiv de lucru: 45 de minute

B

1. Arătați că reuniunea a două drepte necoplanare este o figură care are trei axe de simetrie. ①
2. Arătați că orice izometrie a spațiului aplică două plane secante pe două plane secante. ①
3. Arătați că planul determinat de secțiunea diagonală a cubului este un plan de simetrie al acestuia. ②
4. Determinați care dintre următoarele figuri sînt asemenea: ③
   a) două cuburi;
   b) două tetraedre regulate;
   c) două sfere;
   d) doi cilindri;
   e) două paralelipipede.
5. În planul înzestrat cu sistemul cartezian rectangular de coordonate xOy sînt reprezentate punctele $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(-3, -1)$, $D(0, -4)$. Determinați coordonatele simetricelor acestor puncte față de: ③
   a) originea O;
   b) punctul A;
   c) axele de coordonate;
   d) dreapta AB.

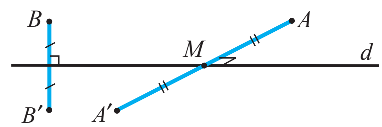


Simetria centrală: S_O



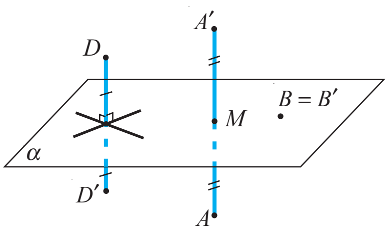
1. $S_O(O)=O$;
2. $\forall M\neq O,\ \ S_O(M)=M'$, astfel încît O este mijlocul segmentului MM'.

Simetria axială: S_d



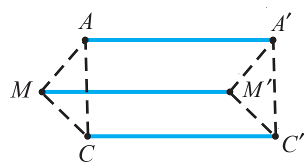
1. $\forall M\in d,\ \ S_d(M)=M$;
2. $\forall A\notin d,\ \ S_d(A)=A'$, astfel încît $AA'\perp d$, și dacă $AA'\cap d=\{M\}$, atunci M este mijlocul lui $[MM']$.

Simetria față de un plan: S_α



1. $\forall B\in\alpha,\ \ S_d(B)=B$;
2. $\forall A\notin\alpha,\ \ S_d(A)=A'$, astfel încît $AA'\perp d$ și punctul $M=AA'\cap d$ este mijlocul segmentului AA'.

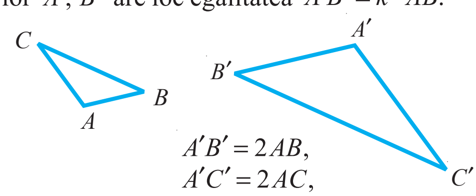
Translația determinată de perechea ordonată $(A,\ A')$ **de puncte distincte:** $t_{AA'}$



$\forall M\notin(AA'),\ \ t_{AA'}(M)=M'$, astfel încît $AA'M'M$ este paralelogram.
$t_{AA'}(C)=C'$

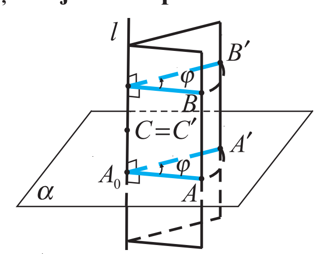
Asemănarea de coeficient $k,\ k>0$

Pentru orice puncte A, B ale spațiului și imaginile lor A', B' are loc egalitatea $A'B'=k\cdot AB$.



$A'B'=2AB,$
$A'C'=2AC,$
$B'C'=2BC.$

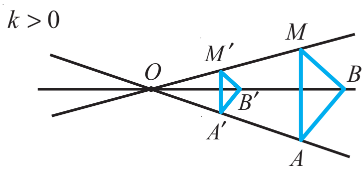
Rotația în jurul dreptei l **cu un unghi** φ: R_l^φ



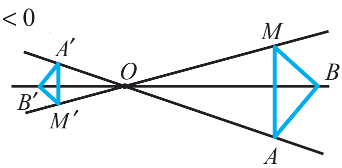
$R_l^\varphi(A)=A',\ \ R_l^\varphi(B)=B'$

Omotetia cu centrul O și coeficientul k

$k>0$



$k<0$



Răspunsuri și indicații

Modulul 1. §1. A. **2.** De exemplu, $(x_n)_{n\ge 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$. **3.** a) $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{9}{8}, \frac{11}{9}$; b) crescător.

§1. B. **6.** $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{9}, \frac{9}{12}, \frac{9}{15}$. **8.** De exemplu, a) $(x_n)_{n\ge 1}$, $x_n = (-1)^{2n-1}\cdot n$; b) $(x_n)_{n\ge 1}$, $x_n = n+2$. **9.** a) Crescător, mărginit; b) crescător, mărginit; c) descrescător, mărginit; d) nici descrescător, nici crescător, mărginit; e) descrescător, mărginit. **10.** a) $\frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10}\right)^2, \left(\frac{11}{10}\right)^3, \left(\frac{11}{10}\right)^4, \left(\frac{11}{10}\right)^5$; b) crescător, mărginit inferior. **12.** a) $x_n = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$; b) strict crescător; c) $1 \le x_n < \frac{3}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$. **13.** a) $x_n = 3\cdot 5^{n-1}$; b) strict crescător. **14.** a) $x_n = 1-2n$, $n\in\mathbb{N}^*$; b) strict crescător, mărginit superior. **15.** a) $x_n = 5n-15$, $n\in\mathbb{N}^*$, crescător, mărginit inferior; b) $x_n = 4\cdot 2^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$, crescător, mărginit inferior. **16.** a) $x_n = a+\beta(n-1)$, $n\in\mathbb{N}^*$; b) $x_n = a\cdot\alpha^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$; c) prin calcul direct sau prin inducție se obține $x_n = a\cdot\alpha^{n-1}+\beta(1+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^{n-2})$, $n\in\mathbb{N}^*$. **17.** $x_n = 5n-2$, $n\in\mathbb{N}^*$.

§2. A. **1.** a) $x_n = 3(-1)^{n-1}$; b) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; c) $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; d) $x_n = (2n-1)^2$. **2.** a) 7, 9, 11, 13; b) -3, 2, 7, 12; c) 1,3; 1,6; 1,9; 2,2; d) $\frac{2}{7}, \frac{1}{5}, \frac{4}{35}, \frac{1}{35}$. **3.** a) $a_1 = 23$; b) $a_1 = 597$. **4.** a) $-10, -5, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **5.** 23 dm. **6.** 1900 de locuri. **7.** 4 154,28 lei. **8.** 1700 m. **9.** 5 760 lei. **10.** 512 bacterii.

§2. B. **11.** 484. **12.** a) $a_n = \frac{n-13}{3}$, $S_{14} = -\frac{77}{3}$; b) $a_n = \frac{5n+16}{35}$, $S_{25} = \frac{405}{7}$. **14.** a) $b_n = 9\cdot 2^{n-1}$; b) $b_n = 10\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$. **15.** a) $b_1 = \frac{768}{125}$; $q = -\frac{5}{4}$; b) $b_1 = \frac{1}{2}$; $q = -\frac{1}{2}$. **16.** $S_9 = 40^8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$. **17.** *Indicație.* Numerele x, y, z rezultă din sistemul $xz = y^2$, $x+z = 2(y+a)$, $x(z+b) = (y+a)^2$. **18.** $\frac{47\pm\sqrt{1993}}{4}$. **19.** a) $b_1 = 0{,}3$; b) $b_1 = -\frac{1}{21}$. **20.** $S = \{55\}$. **21.** Mai mică decît 2. **22.** De exemplu, $180 = 12+24+48+96$; $180 = \frac{9}{2}+\frac{27}{2}+\frac{81}{2}+\frac{243}{2}$.

§3. B. **6.** a) 0; b) 0; c) 0; d) $\frac{1}{3}$; e) 0; f) 0; g) 0; h) 1; i) $\frac{8}{3}$; j) e^{-4}; k) -1; l) $\frac{1}{2}$; m) e^{-2}; n) 0.

Exerciții și probleme recapitulative. A. **1.** a) $\frac{1}{3}, 1, \frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{13}{7}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$; c) $-6, \frac{15}{2}, -\frac{20}{3}, \frac{29}{4}, \frac{-34}{5}$. **2.** a) $x_n = \frac{n}{n+1}$; b) $x_n = 2n$; c) $x_n = 3\cdot(-1)^{n-1}$; d) $x_n = \frac{1}{3^n}$. **3.** De exemplu, a) 22, 24, 26, 28, 30; b) 1, -1, 1, -1, ...; c) $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n\ge 1$. **4.** Nu este monoton. **5.** a) $a_n = -4n+2$; b) $a_n = 2n-1$; c) $a_n = 5n-15$; d) $a_n = 7n-4$. **6.** a) –24 550; b) 4850. **7.** a) $x = \frac{(a^2-1)^2}{2a(2-a)}$; b) $a = b$, $x\in\mathbb{R}$. **8.** a) $b_n = 2\cdot 6^{n-1}$; b) $b_n = -10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; c) $b_n = 3\cdot 2^{n-1}$. **9.** a) $x_n = 2\cdot 3^{n-1}$, $q = 3$; b) $x_n = 2n+2$, $r = 2$; c) $x_n = -4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $q = \frac{1}{3}$; d) $x_n = 5n-6$, $r = 5$. **10.** a) $n = 10$, $S_n = 140$; b) $a_1 = 4$, $n = 8$ sau $a_1 = -2$, $n = 11$. **11.** a) $q = 2$, $S_9 = 2\,555$;

b) $b_1=3$, $S_8=765$. **12.** 5 ore. **13.** 313,6 m. **14.** $-1\pm\sqrt{6}$. **15.** De exemplu, a) $x_{2k}=1+(-1)^{2k}$; b) $x_{2k-1}=\dfrac{2^{2k-1}+(-2)^{2k-1}}{2^{2k-1}}$; c) $x_{2k}=2k\cdot\sin k\pi$; d) $x_{2k}=\cos 2k\pi$; e) $x_{3k}=\dfrac{6k+(-1)^{3k}}{6k}$.

B. 16. 24 u.l. **19.** 243 *l*. **20.** 1224. **21.** $S_n=n[x^2+(3-n)ax+a^2]$. **22.** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $-\dfrac{2}{3}$; e) $\dfrac{2}{3}$; f) $\dfrac{1}{2}$; g) e^{-1}; h) e; i) 0.

Probă de evaluare. **A. 1.** a) $\dfrac{1}{3}, 1, \dfrac{7}{5}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{13}{7}$; b) $0, \dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{2}{3}, 0$. **2.** Strict descrescător. **3.** $a_1=2$, $r=3$ sau $a_1=14$, $r=-3$. **4.** $b_1=1$, $q=-3$. **5.** La etajul 6.

B. 1. $5, -\dfrac{7}{2}, 3, -\dfrac{11}{4}, \dfrac{13}{5}$. **2.** $b_n=4(-3)^{n-1}$. **3.** Strict descrescător. **5.** $a_1=\dfrac{1}{3}$, $r=\dfrac{1}{4}$. **6.** $b_1=\dfrac{30}{7}$, $q=\dfrac{3}{4}$ sau $b_1=-\dfrac{30}{7}$, $q=-\dfrac{3}{4}$. **7.** 9 inele.

Modulul 2.

§1. B. 1. *Indicație*. Arătați că $(2-r, 2+r)\cap E\neq\varnothing$, $\forall r>0$. **2.** a) $-2, 2$; b) 2, 4; c) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -1, 1$. **3.** a) $x_n=4+\dfrac{1}{n}$; b) $x'_n=-1+\dfrac{2}{2n+1}$, $x''_n=\dfrac{n}{n+1}$. **5.** a) 2; b) $\dfrac{3}{7}$; c) $-\dfrac{1}{2}$. **7.** *Indicație*. Studiați $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$ pentru șirurile $(x'_n)_{n\geq 1}$, $x'_n\to x_0$, și $(x''_n)_{n\geq 1}$, $x''_n\to x_0$, care se determină din condiția ca funcția sinus sau funcția cosinus să ia, de exemplu, una dintre valorile 0, 1 sau -1 și aplicați observația 3 de la definiția Heine. **8.** a) $l_s(2)=5$, $l_d(2)=6$; b) $l_s(-1)=l_d(-1)=1$; $l_s(1)=-\infty$, $l_d(1)=+\infty$. **9.** a) $l(0)=1$, $\nexists\, l(1)$; b) $l(0)=-2$, $l(2)=-4$. **10.** a) $l_s(k\pi)=-1$, $l_d(k\pi)=1\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)$; b) $l_s(k)=k-1$, $l_d(k)=k\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to k} f(x)$.
11. a) $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; b) $x_0\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; c) $x_0\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.** a) $a=1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$; $a=-2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$; b) $a=2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$; $a=-3$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$. **13.** $a=1$.

§2. B. 1. a) -1; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) ∞. **2.** a) 4; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) 55; f) $-\dfrac{2}{5}$; g) 0; h) $+\infty$; i) -3. **3.** a) $\dfrac{1}{2}$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $e(e-1)^2$; e) $\dfrac{1}{2}e$; f) $+\infty$. **4.** a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) 2; f) $-\dfrac{1}{3}$. **5.** a) 1; b) 2; c) $(-1)^n$; d) $3\cdot(-1)^{n+1}$. **7.** *Indicație*. A se vedea indicația la exercițiul 7 din §1. a) A; b) F; c) A. **8.** a) $f(\pm 0)=0$, $f(1+0)=f(-1-0)=+\infty$, $f(1-0)=f(-1+0)=-\infty$; b) $f(1+0)=f(-1-0)=0$, $f(1-0)=f(-1+0)=+\infty$; c) $f(-1-0)=1$, $f(-1+0)=0$. **9.** $m=-1$, $m=2$. **10.** $m\in[-1, 3]$. **11.** a) 1; b) $-\infty$; c) 0; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) $-\infty$; h) $-\infty$.

§3. B. 1. a) 3; b) -3; c) $\dfrac{3}{4}$; d) $\dfrac{1}{2}$; e) -2; f) $\dfrac{3}{4}$; g) 4; h) $\dfrac{1}{2}$; i) $\dfrac{1}{16}$; j) 1; k) $\dfrac{1}{4}$; l) $\dfrac{1}{9}$; m) $\dfrac{3}{8}$; n) 3; o) $-\dfrac{2}{3}$; p) $\dfrac{4}{3}$; q) $\dfrac{5}{4}$; r) $e^{\frac{1}{2}}$; s) e^2; t) e^3; u) e^{-1}. **2.** a) $\dfrac{3}{2}$; b) $\dfrac{8}{3}$; c) $-\dfrac{5}{12}$; d) 2; e) 3; f) $-\dfrac{1}{2}$; g) $\dfrac{1}{2}$; h) 3; i) $\dfrac{1}{2}$; j) 2; k) $\dfrac{9}{2}$; l) $-\dfrac{2}{3}$; m) $\dfrac{1}{2}$; n) $-\dfrac{1}{3}$; o) -1; p) $-\dfrac{5}{6}$; q) $-\dfrac{1}{3}$; r) $-\dfrac{5}{2}$; s) $-\dfrac{9}{4}$; t) $\dfrac{5}{6}$; u) $\dfrac{3}{4}$. **3.** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$. **4.** a) $m=-1$, $n=4$; b) $n=2+\pi$, $m=-2$.

§4. B. 1. 1) $\dfrac{12}{25}$; 2) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^5$; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) -3; 5) 1; 6) 0; 7) $2-\log_2 3$; 8) $\dfrac{3}{5}$; 9) $\dfrac{1}{2}$; 10) $-\infty$; 11) $\dfrac{5}{4}$; 12) $\dfrac{1}{5}$; 13) 3; 14) $-\dfrac{1}{2}$; 15) $\dfrac{1}{3}$; 16) -1; 17) -3; 18) 0; 19) e^{-2}; 20) e^3; 21) $\sqrt{6}$; 22) e^5; 23) $\dfrac{2}{3}$; 24) 1;

25) $2^{n(n+1)}$; 26) $\frac{n(n-1)}{2}$; 27) C_{n+1}^2; 28) $\frac{3}{2}\ln 2$; 29) $-\frac{1}{4}$; 30) $-\frac{7}{2}$; 31) $\sqrt[32]{e}$; 32) $e^{10}\cdot\sqrt{e}$; 33) $\sqrt[3]{e}$; 34) $\sqrt[4]{e^3}$; 35) $\sqrt[3]{e^2}$. **2.** $a=1,\ b=-1$. **3.** $+\infty$, dacă $a+2b>0$; $-\infty$, dacă $a+2b<0$; $-\frac{3b}{4}$, dacă $a+2b=0$. **4.** $a=2,\ b=5,\ f(-1\pm 0)=\pm\infty$. **5.** $a=-3,\ b=-1$.

Exerciții și probleme recapitulative. **B.** **1.** a) $\frac{2}{5}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{7}{12}$; d) –3; e) –14; f) $-\infty$; g) $\frac{5}{28}$; h) –1; i) $\frac{1}{12}$; j) $-\frac{3}{4}$; k) $-\frac{3}{4}$; l) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; m) $\frac{2}{3}$; n) $-\frac{1}{4}$. **2.** a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\log_{72}\frac{8}{9}$; f) $\frac{1}{3}$; g) 2; h) $\frac{2}{5}$; i) 3; j) 4; k) e^2; l) e^{-1}; m) $e^{-\frac{3}{2}}$; n) $\frac{3}{5}$. **3.** a) $-\infty$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $+\infty$; e) $+\infty$; f) 0. **4.** a) $a\in\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; b) $a\in\{\pm 1, \pm 4\}$; c) $a=5$; d) $a=0$. **5.** a) $a=1,\ b=-2$; b) $a=-2,\ b=3$; c) $a=2,\ b=4$. **6.** a) $x=-1,\ x=3$; b) 600 m; c) 400 m; d) 5,7°; e) 200 m. **7.** a) 5200 m; b) 621 km 480 m; c) 10 m.

Probă de evaluare. **B.** **1.** C. **2.** C. **3.** a) $l_1=4,\ l_3=9$; b) $l=\frac{9}{4}$; c) $l_2=\frac{1}{16}$; d) $S=(4, 5]\cup[8, 9)$. **4.** a) 1; b) $\frac{1}{2}$.

Modulul 3. **§1.** **B.** **2.** a), b), c) Continuă ca funcție elementară. **3.** a), b) Continuă pe $[a, b]$; c) continuă pe intervalele $[a, x_0)$ și $(x_0, b]$. **4.** a) Continuă pe intervalele $[-3, -2)$, $[-2, -1)$, $(-1, 2]$, $(2, 4]$ și $(4, 5]$; b) $f(-1)\cdot f(0)=2\cdot 1=2$, $f(2)\cdot f(4)=1\cdot 3=3$, $f(0)\cdot f(4{,}5)=1\cdot 2=2$.
5. a) *Indicație*. $\forall x_0\in\mathbb{R}\Rightarrow|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|\Rightarrow\forall\varepsilon\ge 0$ $\exists\delta>0$ $(\delta<\varepsilon)$, astfel încît $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x-x_0|<\delta$; b), c) și d) similar cu a).
6. *Indicație*. Condiția $|f(x)-6|<\frac{1}{10}$ poate fi scrisă $|x^2+x-6|=|x-2||x+3|<\frac{1}{10}$. Cum $|x+3|\le 7$ (deoarece $0\le x\le 4$), condiția anterioară este respectată dacă $|x-2|<\frac{1}{70}$, adică pentru $\delta=\frac{1}{70}$. Funcția este continuă, însă aceasta nu rezultă din condițiile obținute. Verificați dacă $\forall\varepsilon>0$ $\left(\text{și nu numai pentru } \varepsilon=\frac{1}{10}\right)$ $\exists\delta>0$, astfel încît $|x-2|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(2)|<\varepsilon$.
7. a), b) Continuă; c) discontinuă în $x_0=0$; d) discontinuă în $x_0=0$. **8.** $a=0$, $a=-\sqrt{2}$, $a=\sqrt{2}$.
9. a) $x_0=1$; $f(1+0)-f(1-0)=-e$; b) $x_0=-1$, $x_1=0$; $f(-1+0)-f(-1-0)=2$, $f(+0)-f(-0)=1$.
10. a) Continuă în punctele $x_1=-1$, $x_2=1$; b) continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x_0=0$ – punct de discontinuitate de speța a doua. **11.** a) Continuă; b) discontinuă în punctele $x_1=-1$, $x_2=1$.
12. a) $a+be=2$, $a, b\in\mathbb{R}$; b) $a=-1$.

§2. **B.** **1.** a) Discontinuă în $x_0=1$; b) discontinuă în $x_0=1$; c) discontinuă în $x_0=\frac{\pi}{4}$; d) discontinuă în punctele $x_k=k$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.** $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x_\delta$, astfel încît $|x_\delta-x_0|<\delta$ și $|f(x_\delta)-f(x_0)|\ge\varepsilon_0$.
3. *Indicație*. $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=0=f(0)$. Deci, f este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **4.** a) $a=2$, $b=-1$; b) nu există. **5.** a) 2) $f\circ g$ continuă, $g\circ f$ discontinuă în $x_0=0$; b) 2) $f\circ g$ discontinuă în punctele 0, –1, 1, $g\circ f$ continuă; c) 2) $f\circ g$ discontinuă în punctele $x_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $g\circ f$

discontinuă în $x_0=0$; d) 2) $f\circ g$ discontinuă în $x_0=-1$, $g\circ f$ discontinuă în $x_0=1$. **6.** a) $(f\circ g)(x)=(x+1)^2$ şi $(g\circ f)(x)=x^2+1$ continue; b) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}x, \text{ dacă } x\le 1\\ x-2, \text{ dacă } x>1\end{cases}$ discontinuă în $x_0=1$, $(g\circ f)(x)=\begin{cases}x, \text{ dacă } x\le 0\\ x-2, \text{ dacă } x>0\end{cases}$ discontinuă în $x_0=0$; c) $f\circ g$ discontinuă în punctele $x_n=\ln n,\ n\in\mathbb{N}^*$; $g\circ f$ discontinuă în punctele $x_k=k,\ k\in\mathbb{Z}$; d) $f\circ g$ discontinuă în punctele $x_m=m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$, şi $x_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; $g\circ f$ discontinuă în punctele $x_k=k,\ k\in\mathbb{Z}$; e) $f\circ g$ discontinuă în punctele $x_0=0$ şi $x_k=\frac{1}{k},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$; $g\circ f$ discontinuă în punctele $x_k=k,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$; f) $f\circ g$ discontinuă în punctele $x\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$; $g\circ f$ discontinuă în punctele $x_k=k,\ k\in\mathbb{Z}$. **7.** a) $a=1$; b) $a=1$; c) $a=0$; d) $a=\frac{3}{2}$; e) $\forall a\in\mathbb{R}$. **8.** De exemplu, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q}\\ -1, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ $g(x)=-f(x)$.

9. De exemplu, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-1, \text{ dacă } x<0\\ 0, \text{ dacă } x=0\\ 1, \text{ dacă } x>0;\end{cases}$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x$.

§ 3. B. **1.** *Indicație.* $\lim\limits_{x\to x_0} f_\pm(x)=f_\pm(x_0),\ \forall x_0\in I$. **2.** *Indicație*. Fie (a, b) interval finit. $\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R},\ \tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), \text{ dacă } a<x<b\\ \alpha, \text{ dacă } x=a\\ \beta, \text{ dacă } x=b,\end{cases}$ este o funcție continuă pe $[a, b]$, deci şi mărginită: $m\le(\tilde{f}(x))\le M,\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow m\le f(x)\le M,\ \forall x\in(a,b)$. Dacă $(a,b)=(a,+\infty)\ (a\ne-\infty)$, atunci $\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>a$, astfel încît $\beta-\varepsilon<f(x)<\beta+\varepsilon,\ \forall x\ge\Delta$. Pe intervalul (a,Δ) funcția f este mărginită: $m\le f(x)\le M, \forall x\in(a,\Delta)\Rightarrow \min(\beta-\varepsilon, m)\le f(x)\le\max(\beta+\varepsilon, M),\ \ \forall x\in(a,+\infty)$. Similar pentru intervalele $(-\infty, b)$ şi $(-\infty,+\infty)$. **4.** $f:(a,b)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{(x-a)(b-x)}$.

7. De exemplu: a) $f:(0,1)\to[0,1],\ f(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\\ -4x+3, \text{ dacă } x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\\ 0, \text{ dacă } x\in\left(\frac{3}{4},1\right);\end{cases}$ b) $f:(0,1)\to(0,1),\ f(x)=x$;

c) $f:(0,1)\to(0,1],\ f(x)=\begin{cases}2x, \text{ dacă } x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\\ -2x+2, \text{ dacă } x\in\left(\frac{1}{2},1\right).\end{cases}$ **8.** a) *Indicație*. Fie $\alpha=-1,\ \beta=0$. Atunci $f(-1)=-1$ şi $f(0)=1$, şi funcția f nu ia pe $(-1, 0)$ valori din intervalul $(0, 1)$; b) avem $f(0{,}5)=-0{,}5$ şi $f(1)=0$, iar funcția f nu ia pe $(0{,}5; 1)$ valori din intervalul $(-0{,}5; 0)$; c) funcția f ia numai valori întregi. **9.** a) $x\in(e^{-4}, 3)$; b) $x\in(-\infty,-4)$; c) $x\in\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, 1\right)\cup(10^{10},+\infty)$. **10.** a) $f>0$ pe $(-\infty,0)\cup(a,b)\cup(c,+\infty)$ şi $f<0$ pe $(0,a)\cup(b,c)$; b) $f>0$ pe $(1,+\infty)$ şi $f<0$ pe $(-\infty,-4)\cup(-4,1)$. **11.** Teorema despre anularea funcției nu poate fi aplicată.

Exerciții și probleme recapitulative. **B. 1.** $\alpha=-1$. **2.** a) $x=1$ – punct de discontinuitate de speța I; b) $x=1$ – punct de discontinuitate de speța II; c) $x=-1$ – punct de discontinuitate de speța I; d) $f(x)$ este continuă pe $\mathbb{R}$. **3.** $a=\frac{1}{2}$, $b=1$. **5.** a) $x=0$ este punct de discontinuitate pentru funcția f, g este continuă; b) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x=1\\ 1, & \text{dacă } x\neq 1,\end{cases}$ $(g\circ f)(x)=\begin{cases}4, & \text{dacă } x<0\\ 1, & \text{dacă } x=0;\end{cases}$ c) $f\circ g$ este discontinuă în $x=1$; $g\circ f$ este discontinuă în $x=0$. **6.** a), b), d) Mărginite; c) nemărginită. **9.** a) $S=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$; b) $S=(1, 4)$; c) $S=\left(0, \frac{1}{e^2}\right)\cup(1,+\infty)$.

Probă de evaluare. **B. 1.** a) Poate avea loc (*Indicație*. Aplicați teorema lui Weierstrass.); b) nu poate avea loc; c), d), e), f) pot avea loc (*Indicație*. Construiți exemple.) **2.** a) Continuă; b) $x_0=1$ este punct de discontinuitate de speța întîi. **3.** a) Mărginită; b) nemărginită. **4.** $a\in\{0,5; 1\}$.

Modulul 4. **§1. A. 1.** a) $\Delta x=1,5$, $\Delta f=3,75$; c) $\Delta x=-0,5-\sqrt{3}$, $\Delta f=2,75$; d) $\Delta x=-4,7$, $\Delta f=17,39$. **2.** c) $f'(x)=6x^2$; d) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. **3.** a) $f'(-1)=f'(0)=f'(0,5)=f'(10)=0,5$. **4.** a) $y=-x+4$, unghi obtuz; $y=\sqrt{3}x+(3-\sqrt{3})$, unghi ascuțit; b) $y=x+2$, unghi ascuțit; $y=-\sqrt{3}x+(3+\sqrt{3})$, unghi obtuz; c) $y=0$, unghi nul; $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{9-\sqrt{3}}{3}$, unghi ascuțit.

§1. B. 5. b) f nu este derivabilă în punctele $x_0=-2$ şi $x_1=2$. **7.** a) f nu este derivabilă în $x_0=0$; b) f este derivabilă în $x_0=0$. **8.** a) $m\in\mathbb{Z}$, $m>1$; b) $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$. **9.** $n=0$, $m=\frac{2}{e}$. *Indicație*. Pentru a determina parametrii m şi n, puneți condițiile de continuitate şi de derivabilitate ale funcției în punctul $x_0=e$.

§2. A. 1. a) f este derivabilă în x_0 şi x_1; b) f este derivabilă în x_1 şi nu este derivabilă în x_0; c) f este derivabilă în x_1 şi nu este derivabilă în x_0 şi x_2. **3.** a) $y=3x-2$; b) $y=-1$; c) $y=4x+6$. **4.** a) 0°; b) 60°.

§2. B. 6. a) f nu este derivabilă în $x_0=-3$ şi $x_1=3$; b) f nu este derivabilă în $x_0=10$. **7.** a) 1) $y=x+0,75$; 2) $y=6x-3$; 3) $y=-8x-24$; b) 1) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}$; 2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$; 3) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi\sqrt{3}-6}{12}$. **8.** a) 1) Funcțiile f, g, h sînt continue pe $\mathbb{R}$; 2) f este derivabilă pe mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; g este derivabilă pe mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; h este derivabilă pe mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$. **9.** a) 1) $y=3x$, $\alpha=\operatorname{arctg}3$; 2) $y=x+1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$; b) 1) $y=-\frac{1}{3}x-1$, $\alpha=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; 2) $y=-2x+6$, $\alpha=-\operatorname{arctg}2$. **10.** $b=4$, $c=1$.

§3. A. 1. a) $f'(x)=8x^7$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; b) $f'(x)=-7x^{-8}$, $D_{f'}=\mathbb{R}_+^*$; c) $f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}_+^*$; d) $f'(x)=3^x\ln 3$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; e) $f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; f) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; g) $f'(x)=-\frac{1}{x\ln 3}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$; h) $f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$. **2.** a) $\frac{1}{7\ln 7}$; b) $\frac{10}{\ln 10}$; c) 120; d) $\frac{1}{14}$; e) $32\ln 2$; f) 0. **3.** a) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$; b) $y=x\ln 2+1$; c) $y=x\log_8\sqrt{e}+\log_8\frac{2}{e}$; d) $y=5x+4$.

§3. B. 4. a) $f'(x)=1,5\sqrt{x}$, $D_{f'}=\mathbb{R}_+$; b) $f'(x)=3,4x^2$, $D_{f'}=\mathbb{R}$. **5.** a) $f'(x)=\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^*$;

b) $f_d'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0;$ $f_s'(x)=\frac{1}{-2\sqrt{-x}},\ x<0;\ D_{f'}=\mathbb{R}^*;$ c) $f'(x)=\frac{1}{x^2\ln 0{,}4},\ D_{f'}=\mathbb{R}^*;$ d) $f_d'(x)=2^x\ln 2,\ x>0;$ $f_s'(x)=2^{-x}\ln 2,\ x<0;\ D_{f'}=\mathbb{R}.$ **6.** a) $f_d'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1,\ f_s'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;$ b) $f_d'(0)=2,\ f_s'(0)=-2;$ c) $f_s'(0)=3,\ f_d'(0)=-2.$ **7.** a) $y=-42x-63;$ b) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6};$ c) $y=\frac{3x}{27\ln 27}+\frac{\ln 9-1}{\ln 3};$ d) $y=2{,}5x\ln 2{,}5+2{,}5(1-\ln 2{,}5).$ **8.** $m=1,\ n=0.$

§ 4. A. **1.** a) $f'(x)=30x^5;$ b) $f'(x)=\pi e^x;$ c) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 9};$ d) $f'(x)=3x^2-10x;$ e) $f'(x)=14x-3;$ f) $f'(x)=\frac{2}{x\ln 5}.$ **2.** a) $D_f=\mathbb{R}_+,\ f'(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}},\ D_{f'}=\mathbb{R}_+^*;$ b) $D_f=\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}+5x^4,\ D_{f'}=\mathbb{R}^*;$ c) $f'(x)=e^x(1+x),\ D_f=D_{f'}=\mathbb{R};$ d) $D_f=\mathbb{R}_+^*,$ $f'(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x},\ D_{f'}=\mathbb{R}_+^*;$ e) $D_f=\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)=-\frac{\log_3 x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{x\ln 3},\ D_{f'}=\mathbb{R}_+^*;$ f) $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2},$ $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{1\};$ g) $D_f=\mathbb{R}^*,\ f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+2)^2},\ D_{f'}=\mathbb{R};$ h) $f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x},\ D_f=D_{f'}=\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\};$ i) $f'(x)=\frac{e^x(x-4)}{(x-3)^2},\ D_f=D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{3\};$ j) $f'(x)=\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}},\ D_f=(-\infty;\ 0]\cup[0{,}5;\ +\infty),$ $D_{f'}=(-\infty;\ 0)\cup(0{,}5;\ +\infty);$ k) $D_f=\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)=-\frac{4}{x\ln 2},\ D_{f'}=\mathbb{R}^*.$ **3.** a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2};$ b) $\log_5 0{,}5+\frac{2}{\ln 5}.$ **4.** a) $v(t)=-t^2+6t+7;$ b) 15 m/s; c) 7 s. **5.** a) $t_1=1$ s, $t_2=2$ s; b) $v_1(t)=12t+4,\ a_1(t)=12;$ $v_2(t)=3t^2+6t+6,\ a_2(t)=6t+6;$ c) $v_1(1)=16$ m/s, $v_1(2)=26$ m/s, $a_1(1)=a_1(2)=12$ m/s^2; $v_2(1)=15$ m/s, $v_2(2)=30$ m/s, $a_2(1)=12$ m/s^2, $a_2(2)=18$ m/s^2; d) $v_1(t)=v_2(t)$ în momentele $t_1=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ s și $t_2=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ s, $a_1(t)=a_2(t)$ în momentul $t=1$ s.

§ 4. B. **6.** a) $f'(x)=25x^{24}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x;$ b) $f'(x)=\cos x+\frac{1}{x\ln 0{,}3}-\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{x^4}};$ c) $f'(x)=\frac{5}{x}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3x}}+\frac{10}{x^3};$ d) $f'(x)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[6]{32x^5}}+7e^x+\frac{3}{x^{10}};$ e) $f'(x)=-\sqrt{5}\sin x-7\cos x-\frac{4}{x};$ f) $f'(x)=5\left(\frac{\sin x}{4\sqrt[4]{x^3}}+\sqrt[4]{x}\cos x\right);$ g) $f'(x)=8x^2(3\ln x+1);$ h) $f'(x)=3x^{-6}(\log_3 x-0{,}2\log_3 e);$ i) $f'(x)=\frac{10x-15}{x^2-3x};$ j) $f'(x)=\frac{6\sqrt{2}\log_5^2 \operatorname{tg} x}{\sin 2x\ln 5};$ k) $f'(x)=3\cdot 6^{3x}\cdot\ln 6\cdot\sin^2 4x+4\cdot 6^{3x}\cdot\sin 8x;$ l) $f'(x)=\frac{-6x^2\cdot\ln x\cdot\sin(3x^2-1)-2\cdot\cos(3x^2-1)}{x\ln^3 x}.$ **7.** a) $y=\sqrt{3}x+\left(\frac{1}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right);$ b) $y=0;$ c) $y=\sqrt{3}\cdot x+1-\sqrt{3}.$ **8.** $a\in\mathbb{R},\ b=2,\ c=1.$ **9.** De exemplu, a) $f(x)=2x-\sin x+2008;$ b) $f(x)=-e^{2x}-100.$ **10.** a) $S=\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\mid n\in\mathbb{Z}\};$ b) $S=\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}.$ **11.** a) $S=(-\infty,\ 2-\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3},\ +\infty);$ b) $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{36}+\frac{k\pi}{3},\ \frac{7\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}\right).$ *Indicație.* Rezolvați inecuația $\sin(6x-\pi)<\frac{1}{2}.$ **12.** a) $f''(x)=12x-10;$ b) $f''(x)=-18\sin 3x;$ c) $f''(x)=20e^{-2x};$

d) $f''(x)=-\frac{3}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$; e) $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$; f) $f''(x)=-\frac{x}{27\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^3}}$; g) $f''(x)=-\frac{4}{(x+1)^3}$;

i) $f''(x)=(\sqrt{x})^{x-1}\cdot\left[\left(\ln\sqrt{x}+\frac{x-1}{2x}\right)^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}\right]$. *Indicaţie*. Aplicaţi de două ori formula $(\ln x)'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$. **13.** $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}-\frac{5}{x^2+1}+3\operatorname{arctg}x$. **15.** $70m$ N. **16.** 168. **17.** $n\cdot 2^{n-1}$. *Indicaţie*. Derivaţi identitatea $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$ şi substituiţi $x=1$.

§ 5. B. **1.** a) $f(x_1)\approx-0{,}96$, $f(x_2)\approx-1{,}02$; b) $f(x_1)\approx 751{,}2$, $f(x_2)\approx 4{,}86$. **2.** a) $\approx 1{,}16$; b) $\approx 0{,}972$; c) $\approx 6{,}0009$; d) $\approx 0{,}999$; e) $\approx 0{,}05$. **3.** a) $\mathrm{d}f(x)=(3x^2+2)\mathrm{d}x$; b) $\mathrm{d}f(x)=\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$; c) $\mathrm{d}f(x)=\cos(x+1)\mathrm{d}x$; e) $\mathrm{d}f(x)=-2\sin 2x\,\mathrm{d}x$. **4.** a) $\mathrm{d}f(x)=(\log_2 x+\log_2 e)\mathrm{d}x=\log_2(ex)\mathrm{d}x$; b) $\mathrm{d}f(x)=2xe^{4x}(1+2x)\mathrm{d}x$; c) $\mathrm{d}f(x)=\left[\operatorname{ctg}(x+5)-\frac{x}{\sin^2(x+5)}-\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$; d) $\mathrm{d}f(x)=\frac{9}{x}\mathrm{d}x$.
5. a) $-\frac{2}{3}\mathrm{d}x$; b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{d}x$; c) $\frac{1}{\ln 4}\mathrm{d}x$. **6.** a) $\mathrm{d}f(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+20x^3+\frac{7}{x^8}\right)\mathrm{d}x$;
b) $\mathrm{d}f(x)=\left(-2\cdot e^{-x}\cdot\ln 3-\frac{2x}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$; c) $\mathrm{d}f(x)=\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}-\frac{2x-1}{5\sqrt[5]{(x^2-x)^4}}\right)\mathrm{d}x$. **7.** a) $2\frac{1}{8}\mathrm{d}x$; b) nu există; c) $\frac{1}{3}\mathrm{d}x$; d) $28e^4\mathrm{d}x$. **8.** a) $\approx 0{,}695$. *Indicaţie*. Calculaţi $\cos(45°+1°)$. b) $\approx 1{,}05$. *Indicaţie*. Calculaţi $\lg(10+1{,}2)$. c) $\approx 2{,}511$; d) $\approx 0{,}497$; e) $\approx 0{,}92$.

§ 6. A. **1.** a) x_0; b) x_0, x_2; c) x_2; d) x_2; e), f) în nici unul din punctele indicate. **2.** a) 1) $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$; sînt verificate condiţiile teoremei lui Fermat; b) 1) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; sînt verificate condiţiile teoremei lui Fermat. **3.** a) Da; b) nu.

§ 6. B. **6.** a) $c=1$; b) funcţia f nu este derivabilă în $x_0=2$; c) $c=0$; d) $c=\frac{\pi}{2}$. **7.** a) $a=7, b=-3, d=-1$; b) $c=-\frac{3}{14}$. **8.** *Indicaţie*. Aplicaţi corolarul teoremei lui Rolle. **9.** *Indicaţie*. Studiaţi funcţia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot 2^x-2\cdot x^{10}+2$. **11.** a) $c=-0{,}5$; b) $c=\frac{3\sqrt{3}}{e}$; c) teorema lui Lagrange nu poate fi aplicată funcţiei f, deoarece ea nu este derivabilă pe (0, 3); d) $c=\ln\frac{e^5-1}{5e}$.
13. $f'(x)=7$. *Indicaţie*. Aplicaţi corolarul 3 al teoremei lui Lagrange. **14.** a) 3; b) ∞; c) $-\frac{1}{3}$; d) 1; e) 0; f) 0; g) 1; h) 0. **15.** a) 0; b) 0; c) 0.

Exerciţii şi probleme recapitulative. **A.** **1. B**. **2. D**. **3.** a) A; b) $y=2x-1$; c) $S=\mathbb{R}^*$; e) $O(0, 0)$.
4. a) $S=\left\{0, 1\frac{1}{3}\right\}$; b) $S=\{e^{-1}\}$; c) $S=\{0\}$. **5.** $S=[0, +\infty)$. **6.** a) 4 s; b) 6 s.
B. **7.** a) $(\cos x)\sin(\sin x)\mathrm{d}x$; b) $(-\sin x)\cos(\cos x)\mathrm{d}x$; c) $\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$. **8.** a) $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $S=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; c) $S=\{0\}$. **9.** a) 1) $f_s'(0)=f_d'(0)=0$; 2) $f_s'(3)=0$, $f_d'(3)=3$; 3) $f_s'(0)=2$, $f_d'(0)=0$. **11.** *Indicaţie*. Aplicaţi corolarele teoremei lui Rolle. **12.** Funcţia f este continuă pe $[1, +\infty)$, dar nu este derivabilă în punctul $x_0=2$. **14.** $c=\frac{1}{2}$. **15.** a) Funcţia f verifică

condițiile teoremei lui Rolle şi $c=2$; b) Funcția f verifică condițiile teoremei lui Rolle şi $c=\frac{\pi}{2}$; c) Funcția f verifică condițiile teoremei lui Rolle şi $c=\frac{12\pm\sqrt{3}}{3}$. **16.** $\frac{2}{3}$.

Probă de evaluare. **A. 1.** a) <; b) $S=\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$; c) $S=\{-3, 0\}$. **2.** a) $\mathbb{R}_+^*$; b) F; c) $y=x+1$.

3. a) $f'(x)=x\cdot 5^{3x}(2+x\ln 125)$; b) $f'(x)=\frac{-x+15}{2\sqrt{x-5}(x+5)^2}$. **4.** 1,5 s.

B. 1. a) A; b) $S=\left\{(k+1)\frac{\pi}{6} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; c) $y=6x-(6\pi+1)$. **2.** a) $\mathbb{R}_+^*$; b) $\frac{2\log_{0,2}6x}{x\ln 0,2}\mathrm{d}x$;

c) $\frac{2(1-\ln 0,2\cdot\log_{0,2}6x)}{x^2\ln^2 0,2}$. **3.** a) $S=\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}-10+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$;

b) $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{3}-10+2k\pi,\ \frac{4\pi}{3}-10+2k\pi\right)$; $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{2\pi}{3}-10+2k\pi,\ -\frac{\pi}{3}-10+2k\pi\right)$.

4. $e^{-\frac{1}{2}}$. **5.** a) $a=\ln 2$, $b=0$, $d=1$; b) $c=0$. **6.** 1 s.

Modulul 5. **§ 1. A. 1.** a) $(-\infty, -1]\nearrow$, $[-1, 1]\searrow$, $[1, +\infty)\nearrow$; $f(-1)=2$ – maxim, $f(1)=-2$ – minim; b) $(-\infty, 0]\searrow$, $[0, +\infty)\nearrow$; $f(0)=3$ – minim; c) $(-\infty, 1]\searrow$, $[1, +\infty)\nearrow$; $f(1)=-3$ – minim; d) $(-\infty, -2]\nearrow$, $[-2, 2]\searrow$, $[2, +\infty)\nearrow$; $f(-2)=16$ – maxim; $f(2)=-16$ – minim; e) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]\nearrow$, $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]\searrow$, $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)\nearrow$; $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$ – maxim; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{2}$ – minim; f) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]\nearrow$, $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\searrow$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$ – maxim. **2.** a) $f(-2)=f(2)=-4$ – minime, $f(0)=12$ – maxim; b) $f(1)=4$ – minim; c) $f(-5)=0$ – maxim, $f(1)=-324$ – minim; d) $f(-\sqrt{2})=4\sqrt{2}$ – maxim, $f(\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$ – minim; e) $f(1)=0$ – minim, $f(-1)=4$ – maxim; f) f este strict crescătoare. **3.** a) $m=-7$, $M=9$; b) $m=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $M=120$.

§ 1. B. 5. a) $(-\infty, 1]\nearrow$, $(1, 3)\searrow$, $[3, +\infty)\nearrow$; b) $\left[0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]\searrow$, $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)\nearrow$; c) $(-\infty, 3]\searrow$, $[3, +\infty)\searrow$; d) $[0, +\infty)\searrow$; e) $(-\infty, -3]\searrow$, $[-3, -\sqrt{3}]\nearrow$, $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\nearrow$, $[\sqrt{3}, 3]\nearrow$, $[3, +\infty)\searrow$; f) $(-\infty, -1]\nearrow$, $[1, +\infty)\nearrow$. **6.** a) $a\in[1, +\infty)$; b) $a\in[-1, +\infty)$; c) $a\geq 1$. **7.** a) $f(5)=-\frac{27}{4}$ – maxim; b) $f(2k\pi)=1$, $f(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1$, $f(2k\pi+\frac{5}{4}\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, – maxime şi $f(2k\pi+\pi)=-1$, $f\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, – minime, c) $f(-1)=\frac{\pi}{2}-1$ – maxim, $f(1)=1-\frac{\pi}{2}$ – minim; d) $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{e^2}{3}$; e) $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=4e^{-2}$ – maxime; $f(0)=0$ – minim; f) $f(1)=0$ – minim; $f(e^2)=4e^{-2}$ – maxim; g) $f\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{9^{3\sqrt{6}}}{8}$ – maxim; $f(1)=0$ – minim; h) $f(0)=0$ – maxim; $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ – minim; i) $f(-1)=e^{-1}$ – minim; $f(2)=4\sqrt{e}$ – maxim. **8.** a) $m=\min[f(-1), f(0), f(2)]=f(2)=-13$; $M=\max[f(-1), f(0), f(2)]=f(0)=3$; b) $m=\min[f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right), f(\pi)]=f(0)=f(\pi)=1$,

$M=\max[f(0),\ f\left(\frac{\pi}{6}\right),\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right),\ f(\pi)]=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}$; c) $m=2-2\ln 2,\ M=+\infty$.

§ 2. B. 1. a) $y=x$; b) nu are asimptote; c) $x=0, y=3$. **2.** a) $y=0,\ x=0$; b) $x=\pm 2$; c) $y=0$ la $+\infty$, $x=0$; d) $y=x$ la $+\infty$ şi $-\infty$. **3.** a) Concavă pe $(-\infty,\ -3)$ şi convexă pe $(-3,\ +\infty)$; b) convexă pe $(-\infty,\ -1)\cup(0,1)$ şi concavă pe $(-1,0)\cup(1,\ +\infty)$; c) concavă pe intervalele $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, şi convexă pe intervalele $((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; d) concavă pe $(-\infty,0)$ şi convexă pe $(0,\ +\infty)$; e) convexă pe $(-\infty,0)$ şi concavă pe $(0,\ +\infty)$; f) concavă pe $\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right)$ şi convexă pe $\left(e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$; g) convexă pe intervalele $\left(e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}},e^{2k\pi+\frac{3\pi}{4}}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, şi concavă pe intervalele $\left(e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}},e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** *Indicație*. Determinați mai întîi punctele în care $f''=0$ şi punctele în care f'' nu există sau este infinită, apoi discutați semnul lui f'' în vecinătatea punctelor găsite. **5.** a) $y=0, x=0$; b) nu are asimptote; c) $x=0,\ y=1$; d) $x=-1,\ x=0,\ x=1,\ y=x$; e) $y=-1$ la $-\infty$ şi $y=1$ la $+\infty$; f) $y=0$. **7.** De exemplu, $f\colon \mathbb{R}\setminus\{k\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x-[x]},\ k\in\mathbb{Z}$.

§ 3. B. 3. c) $\mathcal{A}_{\max}=\frac{a^2}{2}$.

§4. A. 1. a) $v(0)=s'(0)=12$ m/s. b) Peste 2 secunde. Distanța este de 16 m. **2.** $R=r,\ P_{\max}=P(r)=\frac{E^2}{4r}$. **4.** 4 225 lei.

§ 4. B. 5. $v(t)=3at^2+b;\ \ a(t)=v'(t)=6at$. **6.** *Indicație*. $v(t)=3t^2-12t;\ \ a(t)=6t-12$, $a(t)=0\Rightarrow t=2,\ \ v_{\min}=v(2)=-12$. **7.** *Indicație*. Beneficiul brut $B(x)=p(x)\cdot x-C(x)$. $x=11$ unități, $B_{\max}=479$ u.m.

***Exerciții şi probleme recapitulative.* A. 1.** a) $(-\infty,-4]\nearrow,\ [-4,0]\searrow,\ [0,+\infty)\nearrow$; b) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\nearrow$, $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\searrow,\ \left[\frac{1}{3},+\infty\right)\nearrow$. **2.** a) $(-\infty,-1]\searrow,\ [-1,+\infty)\nearrow$; b) $(-\infty,0]\nearrow,\ [0,1]\searrow,\ [1,+\infty)\nearrow$; c) $(-\infty,-2]\searrow,\ \left[-2,-\frac{1}{2}\right]\nearrow,\ \left[-\frac{1}{2},+\infty\right)\nearrow$; d) $\left(-\infty,\frac{4}{5}\right]\nearrow,\ \left[\frac{4}{5},2\right]\searrow,\ [2,+\infty)\nearrow$; e) $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\searrow$, $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\nearrow,\ \left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)\searrow$; f) $(-\infty,1]\searrow,\ [1,+\infty)\nearrow$. **3.** a) $(-\infty,-1]\searrow,\ [-1,+\infty)\nearrow$; b) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\searrow,\ \left[-\frac{3}{2},0\right]\nearrow,\ \left[0,\frac{3}{2}\right]\searrow,\ \left[\frac{3}{2},+\infty\right)\nearrow$; c) $(-\infty,-2]\nearrow,\ [-2,2]\searrow,\ [2,+\infty)\nearrow$; d) $(-\infty,+\infty)\nearrow$; e) $(-\infty,-1]\nearrow,\ [-1,1]\searrow,\ [1,+\infty)\nearrow$; f) $\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right]\nearrow,\ \left[-\frac{2}{5},0\right]\searrow,\ [0,+\infty)\nearrow$. **4.** a) $m=-3,\ M=2$; b) $m=\frac{6-2\sqrt{3}}{3},\ M=8$. **6.** a) $a=2$; b) $a=-\frac{3}{2}$. **7.** $B_{\max}=B(39)=4\ 443$ lei.

B. 9. a) $(-\infty,-1]\searrow,\ [-1,+\infty)\nearrow$; b) $(-\infty,-1]\searrow,\ [-1,1]\nearrow,\ [1,+\infty)\searrow$; c) $[0,e^{-\frac{1}{2}}]\searrow,\ [e^{-\frac{1}{2}},+\infty)\nearrow$. **10.** $m\in(-\infty,-1]$. **13.** a) $m\in[0,1]$; b) $m\in\varnothing$; c) $m\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$; d) $m=1$. **14.** a) Concavă pe $(-\infty,-1)$ şi convexă pe $(-1,+\infty)$; b) concavă pe $(0,\pi)$ şi convexă pe $(\pi,2\pi)$; c) concavă pe $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ şi convexă pe $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$. **15.** a) $x=0$; b) $x=0$; c), d) nu are puncte de inflexiune; e) $x=e$; f) $x=0,\ x=4$. **16.** a) $x=1,\ y=1$ la $+\infty$ şi $-\infty$; b) $x=-1,\ x=1$,

$y=0$ la $+\infty$ şi $-\infty$; c) $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}x$ la $+\infty$ şi $-\infty$; d) $x=0$, $y=0$ la $+\infty$; e) $x=0$, $y=1$ la $+\infty$ şi $-\infty$; f) $x=k\pi$, $k\in\mathbb{N}$. **17.** $a=8$, $b=2$. **19.** $x=26$, $B_{max}=B(26)=336$ lei.

Probă de evaluare. **A.** **1.** $(-\infty, 3]\searrow$, $[3, +\infty)\nearrow$. **3.** $B_{max}=B(21)=873$ lei.

B. **1.** $(-\infty, -1]\nearrow$, $[-1, 0]\searrow$, $[0, 1]\nearrow$, $[1, +\infty)\searrow$. **2.** $m=-\infty$, $M=2\ln 2$. **4.** $V_{max}=1000$ u.m. şi se realizează pentru impozitul de 50 u.m. pentru o unitate de produs.

Modulul 6. **§1. A.** **1.** a) $-1+2i$; b) $6-2i$; c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-(1+\sqrt{3})i$; d) $-10-10i$; e) $6-\sqrt{3}-(3+\sqrt{2})i$; f) $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$; g) $\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$; h) $21-20i$; i) $2+2i$; j) $\frac{1}{2}$; k) $-\frac{i}{4}$; l) $\frac{44+5i}{318}$. **2.** a) $-i$; b) 1; c) 1; d) $-i$; e) -1. **3.** a) $S=\left\{\left(\frac{37}{11}, \frac{20}{11}\right)\right\}$; b) $S=\left\{\left(-\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)\right\}$; c) $S=\left\{\left(-\frac{7}{5}, -\frac{8}{5}\right)\right\}$; d) $S=\left\{\left(-\frac{3+4\sqrt{3}}{3}, 8+\sqrt{3}\right)\right\}$. **4.** a) $S=\left\{\frac{3-i\sqrt{15}}{4}, \frac{3+i\sqrt{15}}{4}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{15}}{2}\right\}$; d) $S=\left\{\frac{-1-i\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+i\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}}\right\}$; e) $S=\left\{\frac{1-3i}{2}, \frac{1+3i}{2}\right\}$; f) $S=\left\{\frac{-2-i\sqrt{31}}{5}, \frac{-2+i\sqrt{31}}{5}\right\}$; g) $S=\left\{\frac{5-i\sqrt{127}}{4}, \frac{5+i\sqrt{127}}{4}\right\}$; h) $S=\{1-i, 1+i\}$; i) $S=\{-2-i, -2+i\}$. **5.** a) 4; b) $-52i$; c*) $76i$; d*) $117-44i$. **6.** a) $S=\{1+2i\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{5}(3-4i)\right\}$; c) $S=\left\{-\frac{5}{3}+5i\right\}$; d*) $S=\left\{\frac{1}{2}(4-3i)\right\}$. **7*.** a) $S=\left\{1-i, -\frac{1}{3}\right\}$; b) $S=\left\{z_1=\frac{1}{2}((2+i)z_2-i),\ z_2\in\mathbf{C}\right\}$. **8.** a) $\{1\pm i\}$; b) nu există; c) $\{3i\}$.

§1. B. **9.** a) 0; b) $\frac{1}{130}(19-3077i)$; c) $72(1+i)$; d) $\frac{1}{41}(-1+32i)$. **10.** a) $S=\{\pm i, \pm\sqrt{2}\}$; b) $S=\{\pm 2i, \pm\sqrt{3}\}$; c) $S=\{\pm i\sqrt{5}, \pm i\sqrt{7}\}$. **11.** a) z^4+4; b) z^4-1; c) a^2-ab+b^2; d) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$. **14.** $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}+i\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$. **15.** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

§ 2. B. **2.** a) $\{\pm(1-i)\}$; b) $\{\pm(2-3i)\}$; c) $\{\pm(7+i)\}$; d) $\{\pm(\sqrt{3}-i)\}$; e) $\{\pm(\sqrt{3}-i\sqrt{2})\}$; f) $\{\pm(\sqrt{2}+i\sqrt{3})\}$. **3.** a) $S=\{-1+i, -3-i\}$; b) $S=\{1+2i, -6i\}$; c) $S=\{i, -3+i\}$; d) $S=\left\{-3+i, \frac{3-i}{2}\right\}$; e) $S=\{-1+i, 1-i\}$; f) $S=\{-7-i, 7+i\}$. **4.** $\{\pm(\beta-\alpha i)\}$. **5.** a) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$; b) $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$; c) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; d) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$; e) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; f) $4\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$; g) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$; h) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$; i) $2^{-50}(\cos\pi+i\sin\pi)$. **6.** a) 1; b) $-64(1+i)$; c) $512(1-i\sqrt{3})$. **7.** a) $\left\{-i, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}\right\}$; b) $\left\{-3, \frac{3}{2}(1\pm i\sqrt{3})\right\}$; c) $\left\{\pm\frac{1}{2}[(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)i], \pm\frac{1}{2}[(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i]\right\}$;

d) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm \mathrm{i}),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm \mathrm{i})\right\}$; e) $\left\{2^{-\frac{1}{12}}\left(\cos\frac{1}{6}\left(\frac{-5\pi}{12}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{6}\left(\frac{-5\pi}{12}+2k\pi\right)\right)\middle|\ k=\overline{-2,3}\right\}$.

8. a) i; b) $2-\mathrm{i},\ -2-\mathrm{i}$.

§ 3. B. **1.** a) $S=\left\{\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{1}{72}(23\pi+24k\pi)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{72}(23\pi+24k\pi)\right)\middle|\ k=\overline{-3,2}\right\}$;

b) $S=\left\{\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\left(\cos\frac{1}{60}(23\pi+24k\pi)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{60}(23\pi+24k\pi)\right)\middle|\ k=\overline{-3,1}\right\}$;

c) $S=\left\{1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[3]{6}\,\varepsilon,\ \sqrt[3]{6}\,\varepsilon^2\ \middle|\ \varepsilon=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; d) $S=\left\{\pm 1,\ \pm \mathrm{i},\ \pm\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1\pm \mathrm{i})\right\}$;

e) $S=\left\{\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{5}\right)\middle|\ k=\overline{-2,2}\right\}\cup\left\{\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{1}{5}(\pi+2k\pi)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{5}(\pi+2k\pi)\right)\middle|\ k=\overline{-2,2}\right\}$.

2. $S=\{0,\ -1,\ 1\}$. **4.** $S=\left\{\frac{\varepsilon_k+1}{\varepsilon_k-1}\ \middle|\ \varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{6},\ k=\overline{-2,3}\right\}$.

5. a) $S=\left\{-\mathrm{i},\ \mathrm{i},\ \frac{-5-\sqrt{21}}{2},\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right\}$; b) $S=\left\{2\pm\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; c) $S=\left\{-1,\ \frac{5-\sqrt{21}}{2},\ \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Exerciţii şi probleme recapitulative. **A.** **1.** a) $1-2\mathrm{i}$; b) $2+2\mathrm{i}$; c) $-10+10\mathrm{i}$; d) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$; e) i; f) 1; g) i. **3.** a) $S=\{\pm 3\mathrm{i}\}$; b) $S=\{\pm 4+2\mathrm{i}\}$. **4.** 1. **5.** a) $-4(\sqrt{3}-\mathrm{i})$; b) $-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$. **6.** a) $2+\mathrm{i}$; b) $\frac{127}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{11}{4}\mathrm{i}$; d) $\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\mathrm{i}$. **7.** $z=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}+\mathrm{i}$.

B. **8.** –1. *Indicaţie*. Înmulţiţi egalitatea cu $z-1$; se obţine $z^4=z$. **9.** –64.

10. a) $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\mathrm{i},\ \frac{3-\sqrt{21}}{2}\mathrm{i}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}+\mathrm{i}\right\}$; c) $S=\{1+\mathrm{i}\}$; d) $S=\{0,\ \pm \mathrm{i}\}$;

e) $S=\{1-\mathrm{i};\ 0{,}8-0{,}4\mathrm{i}\}$. **11.** a) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

12. a) $\left\{\sqrt[3]{4}(\cos\varphi_t+\mathrm{i}\sin\varphi_t)\mid \varphi_t\in\left\{\frac{2\pi}{9},\ \frac{8\pi}{9},\ \frac{14\pi}{9}\right\}\right\}$;

b) $\left\{\sqrt[3]{\frac{3}{4}}(\cos\varphi_t+\mathrm{i}\sin\varphi_t)\mid \varphi_t\in\left\{\frac{7\pi}{18},\ \frac{19\pi}{18},\ \frac{31\pi}{18}\right\}\right\}$. **13.** a) -2^6; b) -2^7; c) -2^5. **14.** $n=4k,\ k\in\mathbb{N}$.

15. Punctele M_1 şi M_3.

Probă de evaluare. **A.** **1.** a) $\frac{5}{3}-\frac{17}{5}\mathrm{i}$; b) $-\frac{16}{3}-\frac{109}{6}\mathrm{i}$; c) $\frac{11}{50}-\frac{23}{50}\mathrm{i}$. **2.** $S=\left\{\frac{2}{17}(4-\mathrm{i})\right\}$.

3. $S=\left\{\left(1,\ \frac{1}{5}\right)\right\}$. **4.** $S=\left\{\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{6}}{7},\ \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{6}}{7}\right\}$. **5.** a) 2i; b) **C**.

B. **1.** a) $-\frac{11}{3}-\frac{8+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$; b) $93(1-\mathrm{i})$; c) $-\frac{23}{53}+\frac{1}{53}\mathrm{i}$. **2.** $S=\left\{\frac{-\sqrt{7}-7\mathrm{i}}{4},\ \frac{-\sqrt{7}+7\mathrm{i}}{4}\right\}$. **3.** $x=2,\ y=3$.

5. $z_1=-\mathrm{i}$; $z_2=-1-\mathrm{i}$. **6.** $2^4(1+\mathrm{i})$. **7.** $S=\left\{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right),\ -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\mathrm{i}\right\}$. **8.** $S=\{(\mathrm{i},\ 1+\mathrm{i})\}$.

Modulul 7. **§ 1. A.** **1.** a) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -3 \\ 2 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & -2+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -3 & 6 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2\mathrm{i} & 0 & 14 \\ 4 & -2\mathrm{i} & 6 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 6\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} \\ -2 & 4\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} \\ 10\mathrm{i} & -2 & -6\mathrm{i} \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 5\mathrm{i} & 4 \\ -1+\mathrm{i} & 5\mathrm{i} \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$. **2.** $x=2,\ y=1,\ z=-1,\ u=0.$ **3.** a) $AB=\begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 43 & 30 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 5 & 51 \end{pmatrix}$; b) AB nu există,

$BA=\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ -42 & 14 \\ -48 & 8 \end{pmatrix}$; c) $AB=\begin{pmatrix} -3 & 18 & 33 \\ 18 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} -3 & 12 & 11 \\ 27 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; d) $AB=\begin{pmatrix} a+c & b+c & a+b+c \\ 2 & 2 & 3 \\ x+z & y+z & x+y+z \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 1+x & 1+y & 1+z \\ a+1+x & b+1+y & c+1+z \end{pmatrix}$; e) $AB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$, BA nu există; f) $AB=BA=A.$

4. a), b) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 46 & -10 \\ 32 & -8 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix}$.

5. a) $\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -62 & -5 \end{pmatrix}$; b), e) nu există; c) $\begin{pmatrix} -46 & 39 & 96 \\ 9 & -69 & 144 \\ 27 & 27 & -63 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} a^2+bd+cg-1 & ab+bc+ch & ac+bf+ci \\ ad+ed+fg & bd+e^2+fh-1 & dc+ef+fi \\ ag+hd+ig & bg+eh+ih & cg+fh+i^2-1 \end{pmatrix}$.

6. a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$; b) nu există; c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 12 & 22 \\ 18 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-a & -b & 2-c \\ -1 & 1 & 1 \\ 2-x & 2-y & 2-z \end{pmatrix}$; e) nu există;

f) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-a & -b & -c \\ -d & 2-e & -f \\ -g & -h & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$. **8.** $T_1=1{,}1\cdot T=\begin{pmatrix} 2{,}2 & 3{,}3 & 4{,}4 & 2{,}2 & 3{,}3 \\ 4{,}4 & 2{,}2 & 3{,}3 & 6{,}6 & 3{,}3 \\ 3{,}3 & 1{,}1 & 2{,}2 & 3{,}3 & 5{,}5 \end{pmatrix}$.

9. $M=M_1+M_2+M_3=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 13 & 11 & 11 \\ 19 & 11 & 9 & 5 & 12 \\ 12 & 13 & 9 & 17 & 8 \end{pmatrix}$.

§ 1. B. **10.** a) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 20 & -15 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 6 & -2-\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3-3\mathrm{i} & 9 & -3 \\ 0 & 3\mathrm{i} & 9+3\mathrm{i} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 3\mathrm{i} \\ -3 & -1 & -1+4\mathrm{i} \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} \\ c_{k-1} & c_{k-2} \end{pmatrix}$, c_i – numere Fibonacci: $c_{-1}=0,\ c_0=1,$

$c_k=c_{k-1}+c_{k-2}$; h) $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} -33 & 19 & 32 \\ 4 & 47 & -1 \\ -5 & -50 & -29 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 6 & 21 & -10 & 17 \\ -1 & 54 & -51 & 30 \\ -4 & -39 & 20 & 7 \\ 26 & 19 & -2 & 71 \end{pmatrix}$. **11.** a) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 16 & 15 & 8 \\ 16 & 14 & 8 \\ 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. **13.** $S = \begin{pmatrix} 15{,}1 & 11{,}7 \\ 10{,}3 & 8{,}1 \\ 15{,}4 & 11{,}8 \end{pmatrix}\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}$.

14. a) 3, dacă $\alpha \neq -9$; 2, dacă $\alpha = -9$; b) 3, dacă $\alpha \neq 5$; 2, dacă $\alpha = 5$; c) 1. **15.** a) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; b) nu este inversabilă; c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; e) $-\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; h) nu este inversabilă; i) $\frac{1}{2-i}\begin{pmatrix} -2+2i & 1-2i & 2-i \\ 1-2i & i & 0 \\ -i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$;

j) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 6 \\ -1 & 2 & 7 & -10 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -\frac{23}{2} & -1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. **17.** $S = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.

§ 2. A. **1.** a) –10; b) 24; c) $-a$; d) –17i; e) 9–10i; f) –374; g) –11; h) –22; i) 4; j) –18.
2. a) $S = \left\{\left(\frac{11}{7}, \frac{-2}{7}\right)\right\}$; b) $S = \left\{\left(\frac{13}{23}, \frac{-2}{23}\right)\right\}$; c) $S = \left\{\left(\frac{19}{14}, \frac{3}{14}\right)\right\}$; d) $S = \left\{\left(\frac{21}{8}, \frac{-27}{8}\right)\right\}$;

e) $S = \left\{\left(\frac{ac-bd}{a^2+b^2}, \frac{ad+bc}{a^2+b^2}\right)\right\}$; f) $S = \{(1, 0, 1)\}$; g) $S = \{(1, 3, 2)\}$; h) $S = \{(2, 1, 3)\}$;

i) $S = \left\{\left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)\right\}$; j) nu poate fi aplicată regula lui Cramer.

§ 2. B. **3.** a) –20; b) 0; c) 0; d) –15; e) 36. **5.** a) Se va schimba în opus; b) se va înmulți cu $(-1)^n$. **6.** Se va schimba în număr complex conjugat. **7.** Determinantul se va înmulți cu α^n. **8.** *Indicație*. Dezvoltați determinantul după coloana a treia. **9.** a) $x = 1+i$, $y = i$; b) $x = 2+i$, $y = 2-i$; c) $x = 3-11i$, $y = -3-9i$, $z = 1-7i$. **10.** a) 4 u.p.; b) coliniare; c) $\frac{27}{2}$ u.p.; d) 13 u.p. **11.** a) *Indicație*. Adunați la liniile doi și trei linia întîi înmulțită cu –1. $(a-b)(c-a)(c-b)$; b) $(x-a)^2(2a+x)$; c) $ab(a^2+b^2-cb)+c(c^3-b^2c-a^3)$. **12.** a) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; d) $-\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$; e) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 12 & 2 & -9 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. **13.** $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** a) $S=\{1, 2\}$; b) $S=\{0, 3a\}$.

15. a) *Indicaţie*. Adunaţi la linia întîi linia a treia şi scoateţi factorul comun. $(a^2+b^2+c^2)(a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c)$; b) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.

§ 3. A. **1.** a), b), d) nu este soluţie; c) este soluţie. **2.** a) $S=\{(1, 0, 1)\}$; b) $S=\{(1, -3, 3)\}$; c) $S=\{(1, 1, -2)\}$; d) $S=\{(1, 2, -2)\}$. **3.** a) $S=\{(5\alpha-1, 3\alpha+1, \alpha) \mid \alpha\in \mathbf{C}\}$; b) $S=\{(0, 0, 0)\}$; c) $S=\{(0, 0, 2)\}$; d) $S=\left\{\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)\right\}$; e) $S=\{(7, -6, 3)\}$; f) $S=\{(1-\alpha, \alpha, 2\alpha-1) \mid \alpha\in \mathbf{C}\}$.
4. a) 4,5 lei; 4 lei.

§ 3. B. **5.** a) $S=\left\{\left(\frac{-2+4i}{15}, \frac{1-2i}{3}, \frac{-4+3i}{15}\right)\right\}$; b) $S=\{(1, 2, -2)\}$; c) $S=\{(-1, -1, 0, 1)\}$.
6. a), d), e), f) compatibil; b), c) incompatibil. **7.** a) $S=\left\{\left(\frac{1}{5}(11-\alpha), \frac{2}{5}(-1+\alpha), \alpha\right) \middle| \alpha\in \mathbf{C}\right\}$; soluţie particulară: $(3, -2, -4)$; d) $S=\{(1, 2, -2)\}$; e) $S=\{(1, 2, 1)\}$; f) $S=\{(\lambda, 1, 0) \mid \lambda\neq 0\}$; $S=\{(-\alpha, 1-2\alpha, \alpha) \mid \alpha\in \mathbf{C}, \lambda=0\}$. **8.** a) $S=\{(-3\alpha, \alpha, -\alpha) \mid \alpha\in \mathbb{R}\}$; b) $S=\{(\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha\in \mathbb{R}\}$; c) $S=\{(0, 0, 0) \mid \lambda\neq 0\}$; $S=\{(-\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \lambda=0\}$; d) $S=\{(0, 0, 0) \mid \lambda\in \mathbb{R}\}$.

***Exerciţii şi probleme recapitulative.* A.** **1.** a) $\begin{pmatrix} 5 & i & -3 \\ -2i & 8 & 2+7i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3i & 1 & -i \\ 2 & 4i & -1+2i \end{pmatrix}$.

2. a) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -5 \\ 52 \\ -33 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 11 & 9 & 13 \\ -22 & -27 & -17 \\ 29 & 32 & 26 \end{pmatrix}$.

3. a) $x=-1$, $y=2$; b) $x=5$, $y=11$ sau $x=-1$, $y=5$. **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$. **5.** a) 2; b) 3; c) 2. **6.** 1×2.
7. a) $-i$; b) 0; c) -70; d) -88; e) 0; f) $-21i$; g) 0; h) 0. **8.** a) $S=\{(2, 1)\}$; b) $S=\{(i, 1)\}$; c) $S=\{(1, 1, 1)\}$; d) $S=\{(3, 2, 1)\}$; e) $S=\varnothing$; f) $S=\left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$; g) $S=\{(4-t, 5-t) \mid t\in \mathbf{C}\}$; h) $S=\{(2, 3, -1)\}$.
9. 5 gîndaci şi 3 păianjeni. **10.** 5 cm şi 12 cm. **11.** a) $\alpha\in \mathbf{C}\setminus\left\{\frac{16}{3}\right\}$; b) $\alpha\in \mathbf{C}^*$.

B. **12.** $\lambda=210$. **13.** a) $x=1$, $y=-3$; b) $x=1$, $y=2$, $u=0$, $v=3$. **14.** 2. **15.** $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **16.** b) Cea mai mică valoare: -4, cea mai mare: 4. **17.** a) 2; b) 2; c) 4. **18.** a) BA nu există, $AB=\begin{pmatrix} 14 & -5 & 22 & 6 \\ 7 & 10 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $AB=BA=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; c) AB nu există, $BA=\begin{pmatrix} 1 & 4i & 0 \\ 0 & -1 & 1+i \end{pmatrix}$.

19. $\frac{1}{1-\alpha^2}\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & 1 \\ -\alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha\neq\pm 1$. **20.** $X=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. **21.** a) 1; b) 36; c) -15.

22. $\mathcal{V} = 6$ (un. cub.). **23.** a) $S=\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; b) $S=\{-2, 0, 1\pm \mathrm{i}\}$. **24.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **25.** Pentru $\alpha \neq \pm 2$, sistemul este compatibil determinat; pentru $\alpha = 2$, sistemul are o infinitate de soluții; pentru $\alpha = -2$ sistemul este incompatibil. **26.** a) $\begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ 3 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$; b), e), g), h) nu există A^{-1};

c) $\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 14 & -14 & 14 \\ -34 & 14 & -4 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{88}\begin{pmatrix} -6 & 20 & -15 \\ 30 & -12 & 31 \\ -20 & 8 & -6 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 17 & -8 & 5 \\ -16 & 10 & -1 \\ 6\mathrm{i} & -9\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

27. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{13}{36} & \frac{7}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{7}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

c) $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -8 \\ 7 & 2 & -15 & 17 \\ 2 & -8 & 0 & 7 \\ -8 & 2 & 15 & -13 \end{pmatrix}$. **28.** a) $S=\left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{19-9t}{6}, \frac{11-3t}{t}, t\right) \middle| t\in \mathbf{C}\right\}$;

b) $S=\{(5-3t,\ -5+2t, 1-t, t)\mid t\in \mathbf{C}\}$; c) $S=\{(-5+2\lambda+4t,\ -1+\lambda+t, \lambda, t)\mid \lambda, t\in \mathbf{C}\}$;

d) $S=\left\{\left(\frac{1}{6}+5t, \frac{1}{6}-\frac{7}{6}t, \frac{1}{6}+5t, 6t\right) \middle| t\in \mathbf{C}\right\}$;

e) pentru $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-2, 1\}$, $S=\left\{\left(\frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}\right) \middle| \alpha\in \mathbf{C}\right\}$;

pentru $\alpha = 1$, $S=\{(1-\lambda-t, \lambda, t)\mid t, \lambda \in \mathbf{C}\}$; pentru $\alpha=-2$, $S=\varnothing$; f) pentru $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $S=\varnothing$; pentru $\lambda = 0$, $S=\{(-0{,}5\lambda-6{,}5t-1{,}5;\ -3{,}5\lambda-9{,}5t-3{,}5;\ \lambda;\ t)\mid \lambda, t\in \mathbf{C}\}$.

29. a) $S=\{(-5\alpha, \alpha, t, -3\alpha+t)\mid \alpha, t\in \mathbf{C}\}$; b) pentru $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$, $S=\varnothing$; pentru $\lambda=-2$, $S=\{(t,t,t)\mid t\in\mathbf{C}\}$; pentru $\lambda=1$, $S=\{(\alpha, t, -\alpha-t)\mid \alpha, t\in\mathbf{C}\}$; c) pentru $\lambda\neq 1$, $S=\varnothing$; pentru $\lambda=1$, $S=\{(2t, -3t, 5t, 4t)\mid t\in\mathbf{C}\}$. **30.** Vasul I – 7,5 *l*, vasul II – 45 *l*. **31.** Biciclistul I – 5 km/h, biciclistul II – 3 km/h. **32.** Persoana I – 2 000 u.m., persoana II – 3 000 u.m., persoana III – 5 000 u.m.

Probă de evaluare. **A.** **1.** a) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 16 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$. **2.** De exemplu, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & -10 \end{pmatrix}$.

3. $S=\{(1,-1,0)\}$. **4.** $S=\{(0, \frac{2}{3}\alpha, \alpha)\mid \alpha\in\mathbf{C}\}$; soluție particulară: $(0,\ 2,\ 3)$.

B. **1.** a) $\begin{pmatrix} -1 & 3\mathrm{i} & 5+6\mathrm{i} \\ 4\mathrm{i} & 2 & 4+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4+7\mathrm{i} & 4+5\mathrm{i} \\ 12-9\mathrm{i} & -8+5\mathrm{i} \\ 6-9\mathrm{i} & -7+\mathrm{i} \end{pmatrix}$. **2.** De exemplu, $\begin{pmatrix} 2 & 3\mathrm{i} & 0 & 2 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 4 & 8 & 3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 27 & 47 & 21\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

3. C. **4.** $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{6}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$. **5.** $X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 22 & 15 & -21 \\ 16 & 14 & -18 \\ -4 & -6 & 6 \end{pmatrix}$. **6.** $S=\{(2,\ -3,\ 24,\ -39)\}$.

7. $S=\left\{\left(\frac{5}{9}\alpha+\frac{1}{3}\mathrm{i}\beta,\ \frac{1}{9}\beta+\frac{28}{27}\mathrm{i}\alpha,\ -\frac{47}{27}\alpha-\frac{7}{9}\mathrm{i}\beta,\ \alpha,\ \beta\right)\middle|\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\right\}$.

Modulul 8. **§1. A.** **1.** Nu. **2.** F. **3.** a) PQ; b) PC; c) QC. **4.** $\frac{a^2}{16}\sqrt{3}$ u.p. **5.** 3 plane. **6.** 6 plane. **7.** a) 6; b) 4. **8.** a) 10; b) 10. **9.** a) Nu; b) nu; c) da. **10.** a), b) Nici un punct, un punct, o mulţime infinită de puncte; c) nici un punct, un punct, două puncte, o mulţime infinită de puncte. **11.** Da, dacă punctele sînt necoliniare.

§1. B. **14.** *Indicaţie*. Dreptele d_1 şi d_2, fiind concurente, definesc un plan α. Deoarece dreapta d_3 este concurentă cu d_1 şi cu d_2, rezultă că d_3 are două puncte diferite ce aparţin planului α. **15.** *Indicaţie*. Dreptele AD şi CB nu sînt coplanare. **16.** *Indicaţie*. Dacă două plane diferite au un punct comun, atunci toate punctele comune aparţin intersecţiei planelor α şi β. **17.** *Indicaţie*. Dacă trei puncte ar fi coliniare, atunci cele patru puncte ar fi coplanare, ceea ce contrazice ipoteza. **18.** *Indicaţie*. $a\cap AB=C\subset\beta\Rightarrow\beta$ separă punctele A şi B. **19.** *Indicaţie*. $A\in\alpha$ şi $A\notin\beta$, $B\in\beta$ şi $B\notin\alpha\Rightarrow$ dreapta căutată este AB. **20.** *Indicaţie*. Punctul $D\notin(ABC)$.

§2. A. **1.** Nu. **2.** $a\nparallel c$. **3.** Da. **5.** Necoplanare.

§2. B. **8.** $a\nparallel c$. **9.** Mulţimea punctelor spaţiului fără punctele planului (A, d). **10.** $d\nparallel d_2$. **11.** Dreptele d şi AB sînt necoplanare.

§3. A. **1.** $d\parallel MN$. **2.** $EL\parallel FM$. **3.** a) 10 cm; b) 6 cm; c) 16 cm; d) $\frac{bc}{a+c}$.

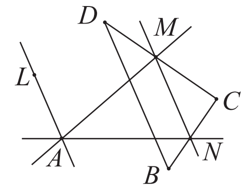
§3. B. **4.** *Indicaţie*. $\Delta A_1BB_1\sim\Delta ABC\Rightarrow A_1B_1\parallel AC$ şi $\Delta D_1DC_1\sim\Delta ADC\Rightarrow D_1C_1\parallel AC$. **5.** *Indicaţie*. Aplicaţi teorema lui Menelaus. $\frac{1}{abc}$. **6.** $MN\parallel(ABC)$. **7.** *Indicaţie*. $M_1=DM\cap AB$, $N_1=DN\cap BC$, atunci $\Delta DMN\sim\Delta DM_1N_1$.

§4. A. **1.** *Indicaţie*. $MN\parallel AB$, $NP\parallel BC$. **2.** *Indicaţie*. a) $LM\parallel AB$ şi $MN\parallel BC$; b) $I_1=PM\cap AB$; c) $I_2=PN\cap AC$; d) $(ABC)\cap(PMN)=I_1I_2$. **3.** $\mathscr{P}_{A_2B_2C_2}=13{,}75$ cm, $\mathscr{P}_{A_3B_3C_3}=22{,}5$ cm, $\mathscr{P}_{A_4B_4C_4}=31{,}25$ cm.

§4. B. **4.** 8 cm. **5.** 38 cm. **6.** $\mathscr{P}_1=\frac{6\lambda+1}{7\lambda+1}\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_2=\frac{4\lambda+1}{7\lambda+1}\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_3=\frac{\mathscr{P}}{7\lambda+1}$. **7.** *Indicaţie*. a) $\Delta MEN\sim\Delta AEB$ şi $\Delta NEP\sim\Delta BEC$; b) $I=NR\cap BD$. **8.** *Indicaţie*. $(MNP)\parallel(ABC)\Rightarrow$ $\Rightarrow(MNP)\cap(AED)$ este o dreaptă $d\parallel AD$ şi $Q\in d$.

Probleme recapitulative. **A.** **1.** a) 17,15 dm; b) 19,5 cm; c) 54 cm. **2.** $MM_1=12$ cm, $NN_1=8$ cm. **3.** 12 cm. **4.** *Indicaţie*. Dacă M_1 este mijlocul segmentului AB, atunci $\Delta MDL\sim\Delta M_1DC\Rightarrow ML\parallel M_1C$.

B. **7.** a) $\frac{a}{\lambda}(\lambda-1)$; b) μa; c) $\frac{l}{k}$; d) $\frac{c}{a}(a-b)$. **8.** 32 cm. **10.** $\frac{m+n}{2n}a$. **11.** 2 m. **12.** $0{,}25a^2\cdot\sqrt{11}$ u.p. **13.** *Indicaţie*. Fie I punctul de intersecţie a oricăror două drepte. Dacă am presupune că a treia dreaptă intersectează una dintre cele două într-un punct diferit de I, atunci această dreaptă ar intersecta şi a doua, dar în acest caz dreptele ar fi coplanare, ceea ce contrazice ipoteza. **14.** Dreptele AB şi DC, unde $D=a\cap AB$.



15. AM, $MN \parallel DB$, AN şi $AL \parallel DB$; a se vedea figura.
16. *Indicație*. Intersecția a două plane ce trec prin două drepte paralele este o dreaptă paralelă cu cele două drepte. **17.** A se vedea problema 16. **18.** Punctul există dacă $AB \nparallel DC$, adică dacă $AD:DE \neq BC:CE$. **19.** *Indicație*. Fie $BE = EC$, atunci $[MF]$ este mediană a ΔADF. Din condiție, $AG:GE = 2:1$, deci $[AE]$ este mediană a ΔADF. **20.** *Indicație*. Dacă $I = AC \cap EF$, atunci $IH \cap AB$ este unul dintre punctele de intersecție, iar $FH \cap DB$ este cel de-al doilea punct. **21.** *Indicație*. a) $I_1 = EF \cap AB$, $H_1 = BC \cap HD$, $I_2 = EH \cap AH_1$ $(EFH) \cap (ABC) = I_1I_2$ etc. c) $F_1 = DF \cap AB$, $H_1 = DH \cap BC$, $F_1H_1 \cap AC = P$, atunci $FH \cap DP$ este punctul de intersecție. **22.** *Indicație*. Aplicați proprietatea liniei mijlocii şi proprietățile paralelogramului. **23.** a) Dreapta ce trece prin punctul E şi centrul paralelogramului; b) $MN \parallel DC \parallel AB$; c) $LP \parallel DC$; d) $MNLP$ este trapez. **24.** *Indicație*. Punctele F_1, F_2 şi F_3 sînt punctele de intersecție a dreptelor CB, AC şi respectiv BA cu planul α. **25.** *Indicație*. Considerați un punct $M \in c$ ($M \notin \gamma$, $AM \nparallel \gamma$, $BM \nparallel \gamma$). Construiți $(ABM) \cap \alpha$, care este dreapta A_1B_1, unde $A_1 = a \cap AM$, $B_1 = b \cap BM$ şi punctul de intersecție este $AB \cap A_1B_1$. **27.** 4.

Probă de evaluare. **A.** **1.** 8 cm. **2.** a) A_1B_1, A_1D_1, D_1C_1, B_1C_1, A_1C_1, D_1B_1; b) (ADB), (DCC_1), (ABA_1), $(D_1A_1B_1)$. **3.** $a(0{,}5+\sqrt{3})$. **4.** 8 cm.
B. **1.** $a \nparallel b$. **2.** a) $EF \parallel (ABC)$, b) $GH \parallel (ABC)$. **4.** $\frac{4}{9}\mathcal{A}$.

Modulul 9. **§1. A.** **1.** *Indicație*. $CD \perp CB$, $CD \perp CF \Rightarrow CD \perp (CBF)$. **2.** $DA \perp CB$, $CB \parallel MN \Rightarrow$ $\Rightarrow MN \perp AD$. **3.** 2,4 cm. **4.** $MB = MD = 5$ cm, $MC = \sqrt{41}$ cm. **5.** $AB = b$. **6.** $AB = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$. **7.** $DE = 4\sqrt{2}$ cm, $CE = 2\sqrt{17}$ cm, $BE = 2\sqrt{13}$ cm, $d = \frac{4}{13}\sqrt{286}$ cm. **8.** $2\sqrt{14}$ cm.
§1. B. **9.** $AB = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. **10.** $\sqrt{a^2 + c^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$.
11. $\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4\sin^2\alpha}}$. **13.** *Indicație*. Dacă $d = \alpha \cap \beta$, atunci din $d_1 \perp \alpha \Rightarrow d_1 \perp d$, iar din $d_2 \perp \beta \Rightarrow d_2 \perp d \Rightarrow d \perp (d_1d_2)$. **14.** *Indicație*. ΔAEC isoscel $\Rightarrow EO \perp AC$; analog ΔBED isoscel $\Rightarrow EO \perp BD$.
§2. A. **1.** *Indicație*. a) $AB \perp MD$, $AB \perp MC$; b) $pr_{(ABC)}[MC) = [MD)$; c) 2,75 cm; d) $1{,}5\sqrt{15}$ cm. **2.** a) 3 cm; b) 0,6. **3.** a) 3 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm. **4.** 24 cm. **5.** 3,8 m.
§2. B. **6.** *Indicație*. a) ΔAVD isoscel, $[VO]$ – mediană; ΔBVE isoscel, $[VO]$ – mediană $\Rightarrow$ $\Rightarrow VO \perp (ABC)$; b) $\Delta AOV \equiv \Delta BOV \equiv \Delta COV \equiv \Delta DOV \equiv \Delta EOV \equiv \Delta FOV$. **7.** *Indicație*. a), b) Dacă $O = pr_{(ABC)}E$, atunci $\Delta AOE \equiv \Delta BOE \equiv \Delta COE \equiv \Delta DOE \Rightarrow OA = OB = OC = OD$. **8.** $c\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.
§3. A. **1.** $\sqrt{6}$ cm. **2.** a) $\frac{9}{4}$ cm; b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm. **3.** 15 cm. **4.** 5 cm.
§3. B. **5.** $\dfrac{\sqrt{1221}}{39}$. **6.** *Indicație*. a) Dacă $O = pr_{(ABC)}E$, iar $[EM]$, $[EN]$, $[EP]$, $[EQ]$ sînt înălțimile triunghiurilor AEB, BEC, CED şi respectiv DEA, atunci $OM = ON = OP = OQ$, deci punctul O este egal depărtat de laturile rombului; b) $\Delta MOE \equiv \Delta NOE \equiv \Delta POE \equiv \Delta QOE \Rightarrow \angle EMO \equiv \angle ENO \equiv$ $\equiv \angle EPO \equiv \angle EQO$. **7.** Dacă $O = pr_{(ABC)}E$ şi $[EM]$, $[EN]$, $[EP]$, $[EQ]$ sînt înălțimile triunghiurilor AEB, BEC, CED şi respectiv DEA, atunci $\Delta MOE \equiv \Delta NOE \equiv \Delta POE \equiv \Delta QOE$, deci $MO = NO = PO = QO$. **9.** 30°. **10.** $\sqrt{3}$.

Probleme recapitulative. **A.** **1.** a) 13 cm; b) 30 cm; c) $\sqrt{p^2+n^2-m^2}$; d) $\sqrt{2p^2+n^2-s^2}$. **2.** $\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2}$. **3.** $d_1=2\sqrt{6}$ cm, $d_2=4\sqrt{2}$ cm. **4.** a) 30°; b) $\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$. **5.** 2 cm. **6.** 15 m.
B. **10.** *Indicaţie*. Dreapta din planul α este perpendiculară pe $pr_\alpha a$. **12.** 32 cm. **13.** $\frac{ab}{a+b}$. **14.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **15.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **16.** $b\cos\alpha\sqrt{1-\text{tg}^2\alpha\,\text{ctg}^2\beta}$. **17.** $\frac{2a\sin\alpha}{\cos\beta}$. **18.** 0,5 m.

Probă de evaluare. **A.** **1.** 3,5 cm. **2.** $\sqrt{6}$ cm. **3.** $5\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{29}$ cm. **4.** 4 cm.
B. **1.** $\frac{1}{2}|a-b|$. **3.** $\sqrt{70}$ cm, $2\sqrt{16{,}06}$ cm. **4.** 45°.

Modulul 10. **§ 1. A.** **2.** Nu este. **3.** Este o transformare geometrică, dar nu este o izometrie. **4.** Nu întotdeauna (de exemplu, proiectarea paralelă).
§ 1. B. **8.** a) $B'K'$, unde $A'K'=K'C'$; b) $B'L'$, unde $\angle A'B'L'\equiv\angle L'B'C'$ etc. **9.** Dacă $C\in[AB]$ şi $f(C)=C'$, atunci $AC=AC'$, $CB=C'B$ şi $AC+CB=AC'+C'B$, deci $C\equiv C'$. Analog pentru $C\notin[AB]$. **10.** a) A se vedea problema 9; b) nu. **11.** a) Da, dacă $f(A)=A$, atunci $f^{-1}(A)=f^{-1}(f(A))=\mathrm{I}(A)=A$. b) da, deoarece $(f\circ f)(A)=f(A)=A$. **12.** Da, deoarece $(f\circ f)(A)=f(f(A))=f(B)=A$.
§ 2. A. **2.** Sînt simetrice. **3.** O infinitate şi mulţimea lor reprezintă o dreaptă paralelă cu dreptele date. **4.** Nu. **5.** Nu. **6.** Sînt coliniare. **8.** Da (centrul, orice dreaptă, orice plan care trece prin centrul simetriei centrale). **9.** Identică. **10.** Nu.
§ 2. B. **13.** a) Un segment paralel cu cel dat; b) o dreaptă paralelă cu cea dată; c) un plan paralel cu cel dat.
§ 3. A. **1.** a) Triunghiul isoscel, dreptunghiul; b) triunghiul cu laturi de lungimi diferite, paralelogramul. **2.** Dreptele care trec prin centrele a două feţe opuse; dreptele care trec prin mijloacele a două muchii paralele ce nu aparţin aceleiaşi feţe. **4.** a) $\alpha\equiv\alpha'$ şi $d\in\alpha'$; b) $\alpha\equiv\alpha'$ şi $d\perp\alpha'$; c) $d\cap\alpha'\neq\varnothing$. **5.** Orice mediatoare a segmentului AB. Reuniunea este planul mediator al segmentului AB. **6.** a) Dreapta suport şi orice mediatoare a segmentului; b) dreapta suport a semidreptei; c) însăşi dreapta şi orice dreaptă perpendiculară pe ea; d) orice dreaptă din plan şi orice dreaptă perpendiculară pe plan; e) dreapta care este perpendiculară pe planul paralelogramului şi care trece prin punctul de intersecţie a diagonalelor lui.
§ 3. B. **7.** a) Imaginea dreptei paralele cu axa este o dreaptă paralelă cu cea dată; imaginea dreptei care intersectează axa este o dreaptă care trece prin punctul de intersecţie a dreptei date cu axa şi axa este dreapta suport a bisectoarelor unghiurilor opuse la vîrf formate de dreaptă şi imaginea ei; imaginea dreptei neconcurente cu axa este o dreaptă neconcurentă cu cea dată. **8.** a) Orice dreaptă perpendiculară pe axa de simetrie şi însăşi axa; b) axa de simetrie.
§ 4. A. **2.** Orice dreaptă din plan şi orice dreaptă perpendiculară pe plan. **3.** a) Orice plan care conţine segmentul şi planul mediator al segmentului; b) orice plan care conţine dreapta şi orice plan perpendicular pe dreapta dată; c) însuşi planul şi orice plan perpendicular pe planul dat; d) planul care conţine dreptele date şi două plane perpendiculare pe planul definit de dreptele date şi care conţin bisectoarele unghiurilor formate de dreptele date; e) planul determinat de dreptele date, planul perpendicular pe planul determinat de dreptele date, egal depărtat de la dreptele date şi orice plan perpendicular pe dreptele date; f) planul egal depărtat de la planele date şi orice plan perpendicular pe planele date. **4.** Sînt coplanare. **6.** 5 m. **7.** $\alpha\parallel\beta$, dacă $\alpha\parallel\gamma$; $\alpha\nparallel\beta$, dacă $\alpha\nparallel\gamma$.

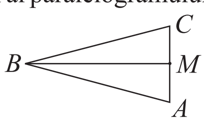
§ 4. B. **9.** Punctul M este punctul de intersecție a dreptei AB' cu planul α, unde B' este simetricul punctului B față de planul α. **10.** Punctul M este punctul de intersecție a dreptei AB' cu planul α, unde B' este simetricul punctului B față de planul α. **11.** Un cerc situat în planul care trece prin punctul A perpendicular pe dreapta d, al cărui centru este punctul de intersecție a dreptei d cu acest plan, iar raza – distanța de la punctul A la dreapta d.

§ 5. B. **5.** Puncte invariante nu există. Orice dreaptă şi orice plan paralele cu dreapta determinată de un punct şi imaginea lui la această translație. **6.** t_{BA}.

§ 6. B. **2.** Nu este. **3.** Nu. **4.** Un singur punct – centrul omotetiei. Orice dreaptă care trece prin centrul de omotetie. **5.** 9 cutii. **6.** a) Laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt paralele cu laturile triunghiului ABC; b) a se vedea 6 a). **7.** $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. **9.** a) Un cerc; b) un disc; c) un paralelogram; d) un pătrat; e) un cub; f) o sferă.

§ 7. B. **3.** a) O infinitate de axe; b) o axă; c) o axă sau nici una; d) nici o axă. **7.** *Indicație*. Considerați rotația în jurul axei l care aplică punctul B pe punctul B', astfel încît: 1) $B' \in (lA)$; 2) A şi B' sînt situate de părți diferite ale dreptei l. Atunci $M = AB' \cap l$ satisface condiția problemei.

Probleme recapitulative. **A.** **1.** *Indicație*. Dacă O este mijlocul $[AC]$, atunci $S_O(d_1) \cap d_2$ este un vîrf al paralelogramului căutat. **2.** *Indicație*. Dacă O este mijlocul $[AC]$, atunci $S_O(d) \cap \mathscr{C}$ este un vîrf al paralelogramului.

3. 

$S_M(B) = B_1 \Rightarrow ABCB_1$ – paralelogram cu diagonalele perpendiculare $\Rightarrow$
$\Rightarrow ABCB_1$ romb.

4. Dacă $S_M(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_1'$ şi $\mathscr{C}_1' \cap \mathscr{C}_2 = B$, atunci dreapta AB este cea căutată.

B. **1.** Dacă $P_1 = S_{AC}(P)$ şi $P_2 = S_{BC}(P)$, atunci $\{X_1\} = AC \cap P_1P_2$ şi $\{Y_1\} = BC \cap P_1P_2$. **6.** Punctul de impact este intersecția bordurii cu segmentul ce uneşte unul dintre aceste puncte cu simetricul celuilalt punct față de această bordură. **7.** Vîrful C este intersecția dreptei d şi dreptei BA_1, unde $A_1 = S_d(A)$. **8.** Dacă $d_3 = t_{\bar{a}}(d_1)$, atunci $M_2 = d_3 \cap d_2$, iar $M_1 = t_{-\bar{a}}(M_2)$. **9.** Fie $B_2 \in d_2$ şi $BB_2 \parallel d_1$, $A_2 \in d_1$ şi $AA_2 \parallel d_2$, $\bar{a} = \overrightarrow{AA_2}$, $\bar{b} = \overrightarrow{BB_2}$, atunci $t_{\bar{a}+\bar{b}}(A) = A_1$, $t_{\bar{a}+\bar{b}}(B) = B_1$.

Probă de evaluare. **A.** **1.** Planele bisectoare ale figurii date şi orice plan perpendicular pe dreapta de intersecție a planelor. **2.** Dreapta situată în planele determinate de dreptele date, echidistantă față de acestea. Orice dreaptă din planul determinat de aceste drepte, perpendiculară pe acestea, şi orice dreaptă perpendiculară pe planul determinat de aceste drepte, care intersectează prima axă de simetrie. **3.** Un centru, 13 axe, 9 plane. **4.** Nu are centru, 7 axe, 6 plane.

B. **1.** Fie a şi b dreptele necoplanare date. Considerăm dreapta AB perpendiculara comună pe dreptele a şi b (aceasta există şi este unică), unde $A \in a$, $B \in b$. Fie punctul C mijlocul segmentului AB. Considerăm dreptele a_1, b_1 care trec prin punctul C, paralele cu a şi respectiv b. Atunci axele de simetrie ale figurii date sînt dreapta AB şi suporturile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele a_1 şi b_1. **4.** a) Da; b) da; c) da; d) în caz general, nu; e) în caz general, nu.

Cuprins